

## ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИ СОГЛАСОВАННЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МОДЕЛИ ИЗЛУЧАЮЩЕГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА

© 2011 г. М. Я. Иванов

(111116 Москва, Авиамоторная ул., 2, ЦИАМ)

e-mail: ivanov@ciam.ru

Поступила в редакцию 02.07.2010 г.

Рассмотрен вопрос термодинамического согласования законов сохранения массы, импульса и энергии, описывающих движение теплопроводного газа при наличии радиационного теплообмена. Исследование проводится в рамках односкоростной двухкомпонентной математической модели сплошной сжимаемой среды с газовой и радиационной составляющими. В основе работы лежат известные опытные данные по излучению и некоторые экспериментальные результаты современной физики. Библ. 29. Фиг. 6.

**Ключевые слова:** законы сохранения, излучающий теплопроводный газ, давление радиационной составляющей, термодинамика газотурбинного двигателя.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В течение многих лет (в 50-х – 70-х годах XX в.) академик А.А. Дородницын читал классический курс “Основы теории пограничного слоя и теплообмена” на аэромеханическом факультете Московского физико-технического института (см. [1]). В своих лекциях он уделял особое внимание важным проблемам согласования термодинамических и газодинамических законов, а также узловому вопросу роста энтропии на разрывных решениях уравнений газовой динамики. Данная проблема остро стояла при разработке методов решения нелинейных задач аэрогидродинамики. Одним из первых эффективных методов решения этих задач был известный метод интегральных соотношений А.А. Дородницына (см. [2], [3]), получивший дальнейшее плодотворное развитие в работах его учеников О.М. Белоцерковского и П.И. Чушкина (см. [4]–[7]).

Основополагающие научные результаты были получены Дородницыным в теории ламинарного пограничного слоя в сжимаемом газе [8], [9]. Им, в частности, было выполнено обобщение методов расчета пограничного слоя несжимаемой жидкости на случаи сжимаемого газа. Данное направление получило дальнейшее развитие и применяется для расчета пограничных слоев при обтекании поверхностей сверхзвуковым потоком с учетом излучения (см. [10], [11]).

В те же годы (в 60-е годы XX в.) к изучению вопроса термодинамически согласованных законов сохранения обратился С.К. Годунов (см. [12], [13]). Важно подчеркнуть, что данный вопрос был также непосредственно связан с численными методами расчета обобщенных решений квазилинейных уравнений газовой динамики, имеющих вид законов сохранения. Полученные результаты и обширную библиографию последующих работ по данной теме можно найти в публикациях [14]–[18].

Аккуратное термодинамическое согласование законов сохранения газовой динамики требуется при теоретическом решении многих прикладных задач, например задач разработки высокотемпературных газотурбинных двигателей (ГТД, см. [19]). Известные затруднения и большие временные задержки создания современных авиационных ГТД непосредственно связаны с правильным решением данной проблемы. Здесь прежде всего следует указать, что теоретически рассчитанные термогазодинамические параметры узлов и всего двигателя в целом существенно отличаются от их экспериментально регистрируемых значений на первых опытных образцах. В частности, обычно регистрируется заметное превышение, а иногда недопустимо высокое зна-

чение температуры газа на входе в турбинный узел двигателя. Таким образом, отмечавшаяся Дороницыным проблема согласования законов термодинамики и аэромеханики не потеряла своей актуальности до настоящего времени.

В представляемой статье решение рассматриваемой проблемы строится теоретически с привлечением современных опытных результатов физики. Для наглядности изложение будет проводиться в рамках односкоростной двухкомпонентной (1V2C) математической модели сжимаемой сплошной среды с газовой и радиационной составляющими.

Будут изложены примеры практического применения предложенной теоретической модели, которые могут служить ее экспериментальным обоснованием. Здесь, в частности, дано аналитическое и численное решение модельной задачи расширения теплового следа в ламинарном потоке газа за сильно нагретой нитью. Данная задача интересна тем, что в экспериментальных исследованиях обнаружен эффект аномально интенсивного расширения теплового следа. На основе методологии 1V2C построена теоретическая модель реализующегося процесса и приведено соответствующее аналитическое решение. Выполнены также расчетные исследования наблюдающегося эффекта методами вычислительной гидродинамики. Система законов сохранения при этом интегрируется широко распространенным методом сквозного счета Годунова (см. [14]). Представлены характерные результаты термогазодинамического расчета рабочего процесса, реализующегося в тракте авиационного газотурбинного двигателя. Отмечен ряд особенностей этого процесса, связанных с наличием гидродинамических и тепловых потерь, которые необходимо учитывать при согласовании различных узлов двигателя.

Система термодинамически согласованных законов сохранения рассматривается для двухкомпонентной сплошной сжимаемой среды с газовой и радиационной составляющими. В разд. 2 статьи излагается газодинамическая модель радиационной составляющей, в разд. 3 выписывается замкнутая система законов сохранения, в разд. 4 приведен ряд конкретных результатов.

## 2. ГАЗОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАДИАЦИОННОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ

Опишем замкнутую газодинамическую модель радиационной компоненты, которая опирается на классические эмпирические результаты по излучению и экспериментальные достижения современной физики. Для детального рассмотрения нам будет достаточно использовать четыре основных исходных положения.

**Положение 1.** Для радиационной составляющей, отождествляемой с фотонным газом, применяется классическое приближение газообразной среды с показателем адиабаты  $\kappa = 4/3$ , в которой тепловые радиационные процессы непосредственно определяются фотонным газом, имеющим, в соответствии с последними опытными данными, конечную массу частиц.

**Положение 2.** Радиационный поток равновесного излучения  $S$  с поверхности абсолютно черного тела определяется в соответствии с законом Стефана–Больцмана:  $S = \sigma T^4$  Вт/м<sup>2</sup>, где  $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$  Вт/м<sup>2</sup>/К<sup>4</sup>.

**Положение 3.** Исходная температура радиационной составляющей в окрестности Земли соответствует замеренной экспериментально равновесной температуре фонового излучения  $T_0 = 2.735$  К.

**Положение 4.** Скорость распространения слабых возмущений в сжимаемой радиационной среде при температуре  $T_0 = 2.735$  К принимается равной скорости света в вакууме  $c = 3 \times 10^8$  м/с.

Изложенные четыре положения позволяют сформулировать достаточно полную физическую и математическую модель для радиационной составляющей. При этом, суммируя сказанное выше, мы фактически отождествляем рассматриваемую в работе радиационную составляющую с традиционным фотонным газом ( $\kappa = 4/3$ ) и классическим эфиром, полагая их сжимаемыми и приписывая конечную (не нулевую) массу фотонам (частицам эфира).

На основе этих четырех исходных положений получаем все необходимые характеристики рассматриваемого “телесного” фотонного газа. С использованием простейшего газокINETического приближения определяем массу  $m$  частицы. Запишем осредненную кинетическую энергию хаотического движения частиц фотонного газа в виде

$$E = \frac{m v_{\text{ср}}^2}{2} = \frac{3}{2} k T_0 = m \frac{3 R_y T_0}{2 m N_A} = \frac{m}{\kappa} \frac{3}{2} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{9}{8} m c^2.$$

Здесь  $k = R_y/N_A$  – постоянная Больцмана,  $R_y$  – универсальная газовая постоянная,  $N_A$  – число Авогадро. Из приведенного соотношения находим массу  $m$  частицы радиационной составляющей:

$$m = \frac{4kT_0}{3c^2} = 5.6 \times 10^{-40} \text{ кг.}$$

Вычислим газовую постоянную  $R = R_y/(mN_A)$  и удельные теплоемкости  $c_v$  и  $c_p$ :

$$R = \frac{k}{m} = 0.25 \times 10^{17} \text{ Дж/К кг} \quad (\kappa = 4/3),$$

$$c_v = 0.75 \times 10^{17} \text{ Дж/К кг}, \quad c_p = R + c_v = 1 \times 10^{17} \text{ Дж/К кг.}$$

Еще раз подчеркнем, что, в соответствии с положением 1, для рассматриваемой радиационной составляющей справедливо классическое уравнение состояния

$$p = \rho RT$$

и следующее из него соотношение

$$p = (\kappa - 1)\rho e,$$

где  $e = c_v T$  – удельная внутренняя энергия.

Далее, из закона Стефана–Больцмана для плотности равновесного излучения с поверхности тела с использованием значения эмпирической константы Стефана–Больцмана  $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ Вт/м}^2/\text{К}^4$  оценим величину давления  $p_0$  и плотности  $\rho_0$  радиационной составляющей при исходной температуре  $T_0 = 2.735 \text{ К}$ . Для этой цели запишем закон сохранения энергии для покоящегося объема  $\Omega$  рассматриваемой среды с границей  $\Gamma$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \rho e d\omega = - \iint_{\Gamma} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} d\gamma,$$

или в дифференциальной дивергентной форме

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} = -\text{div} \mathbf{S}.$$

Проинтегрируем данное соотношение для простейшего одномерного случая от начального значения с  $T = 0$  и  $p = 0$  до  $T_0 = 2.735 \text{ К}$  и  $p_0$ , когда в единичном объеме на левой грани  $T = 0$ , на правой  $T = T_0$ . Имеем

$$\rho_0 e_0 D = \frac{p_0 D}{\kappa - 1} = \sigma T_0^4,$$

где  $D = \Delta x / \Delta t$  имеет размерность скорости. В частном случае с граничным условием, обеспечивающим значение  $D = 1$ , определяем величину

$$p_0 = (\kappa - 1)\sigma T_0^4 = 10^{-6} \text{ Па},$$

$$\rho_0 = p_0 / RT_0 = 1.46 \times 10^{-24} \text{ кг/м}^3.$$

Здесь следует указать, что давление  $p_0$  радиационной составляющей есть непосредственно давление в замкнутой области  $\Omega$ , находящейся при температуре  $T_0$  и излучающей с поверхности поток равновесного излучения  $S = \sigma T_0^4$ . Эта величина отличается на множитель  $c = 3 \times 10^8 \text{ м/с}$  от своего линеаризованного значения вдали от источника, которое было определено в 1900 г. в классических экспериментах П.Н. Лебедева. Здесь можно указать аналогию с обычной газообразной средой, в которой акустическое давление вдали от источника шума отличается от значения давления непосредственно в источнике (данное отличие также характеризуется множителем, содержащим величину скорости распространения возмущений, в этом случае – скорости звука  $c$ ).

В заключение этого раздела подчеркнем, что определенные значения  $T_0$ ,  $p_0$  и  $\rho_0$  имеют весьма важное значение. С одной стороны, эти параметры характеризуют состояние радиационной составляющей в вакууме (в окрестности Земли и Солнечной системы). С другой стороны, эти зна-

чения можно использовать при расчете адиабатических процессов в данной среде. В частности, при определении параметров адиабатического процесса можно применить соотношение

$$p/p_0 = (T/T_0)^{\kappa/(\kappa-1)}.$$

В случае адиабатического сжатия до температур  $T$ , равных 1500 К, 1700 К, 1900 К и 2100 К, получаем значения давления, соответственно, 1, 1.5, 2.3 и 3.5 атм. Приведенные значения давления являются весьма существенными и должны учитываться в практических приложениях.

### 3. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ ОДНОСКОРОСТНОЙ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ МОДЕЛИ С ГАЗОВОЙ И РАДИАЦИОННОЙ СОСТАВЛЯЮЩИМИ

Приведем полную систему законов сохранения для односкоростной двухкомпонентной модели газообразной среды с учетом радиационной составляющей, описанной выше. Все используемые параметры будем обозначать традиционным способом, приписывая им соответствующие индексы:  $g$  – для газовой составляющей,  $f$  – для радиационной составляющей (например, для плотности  $\rho_g$  и  $\rho_f$ ). Суммарное значение плотности, давления и внутренней энергии будем обозначать без индекса. Для односкоростной модели значения скорости  $\mathbf{V}$  и ее компонент  $u$ ,  $v$ ,  $w$  на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  одинаковы для обеих компонент среды.

Закон сохранения массы в дивергентном виде (уравнение неразрывности) для двух компонент имеет вид

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \text{div}(\rho_g \mathbf{V}) = q_g,$$

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \text{div}(\rho_f \mathbf{V}) = q_f.$$

Суммарный закон сохранения массы среды получаем сложением этих соотношений:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{V}) = q, \tag{1}$$

где  $\rho = \rho_g + \rho_f$ ,  $q = q_g + q_f$  – суммарная плотность и суммарный источник массы,  $q_g$  и  $q_f$  – источники массы для газовой и радиационной составляющих.

Законы сохранения импульса по компонентам среды имеют вид

$$\frac{\partial \rho_g \mathbf{V}}{\partial t} + \text{div}(\rho_g \mathbf{V}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})) + \text{grad} p_g = r_g,$$

$$\frac{\partial \rho_f \mathbf{V}}{\partial t} + \text{div}(\rho_f \mathbf{V}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})) + \text{grad} p_f = r_f,$$

суммарный закон имеет вид

$$\frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{V} \cdot (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})) + \text{grad} p = r, \tag{2}$$

где  $p = p_g + p_f$ ,  $r = r_g + r_f$  – суммарные давления и источниковый член.

Законы сохранения энергии имеют вид

$$\frac{\partial \rho_g e_g}{\partial t} + \text{div}(\rho_g e_g \mathbf{V}) + p_g \text{div} \mathbf{V} = \text{div}(K_g \text{grad} T_g) + c_{fg}(T_f - T_g) + Q_g, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \rho_f e_f}{\partial t} + \text{div}(\rho_f e_f \mathbf{V}) + p_f \text{div} \mathbf{V} = \text{div}(K_f \text{grad} T_f) + c_{fg}(T_g - T_f) + Q_f, \tag{4}$$

суммарный закон имеет вид

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \text{div}(\rho e \mathbf{V}) + p \text{div} \mathbf{V} = -\text{div} W + Q, \tag{5}$$

где

$$e = \frac{\rho_g}{\rho} e_g + \frac{\rho_f}{\rho} e_f, \quad -W = K_g \text{grad } T_g + K_f \text{grad } T_f, \quad Q = Q_g + Q_f.$$

Законы сохранения энергии (3) и (4) записаны для теплопроводной газовой и радиационной составляющих (первые слагаемые в правых частях уравнений,  $K_g$  и  $K_f$ , соответственно, коэффициенты температуропроводности газовой и радиационной составляющих). Вторые слагаемые в правых частях уравнений (3) и (4) характеризуют обмен энергией между газовой и радиационной составляющими. Последние слагаемые  $Q_g$  и  $Q_f$  суть дополнительные источники (стоки) энергии, учитывающие наличие дополнительных каналов обмена энергией (например, в случае учета химических превращений и т.п.).

Закон сохранения энергии (5) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \rho(e + V^2/2)}{\partial t} + \text{div} \left[ \left( \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) + p \right) \mathbf{V} \right] = -\text{div } W + Q. \quad (6)$$

Выписанная система уравнений аналогична системе уравнений, интегрируемой в работах [20]–[22]. Основным отличием является то, что в [20]–[22] рассматривается безмассовый фотонный газ (в приближении “серой” материи), а в настоящей работе – это радиационная составляющая, имеющая телесные частицы, обладающие конечной массой  $m = 5.6 \times 10^{-40}$  кг. Отметим также работу [23], в которой анализируются математические аспекты газообразных многофазных сплошных сред с помощью формализма термодинамически согласованных систем (см. [16]).

Уравнение (6) с правой частью  $-\text{div } S$ , где поток излучения  $S = \varepsilon \sigma T^4$  ( $\varepsilon$  учитывает степень черноты излучаемой поверхности), часто используется при моделировании течений излучающего газа (см., например, [10], [11]).

Система уравнений (1)–(6) замыкается обычными уравнениями состояния газообразной среды. При использовании суммарных уравнений (1), (2), (6) имеем двучленное уравнение состояния (см. [21], [22]). В этом случае весьма эффективным оказывается применение к интегрированию уравнений схемы Годунова (см. [14]).

Полученная система уравнений (1)–(6) представляет собой замкнутую систему термодинамически согласованных законов сохранения. С помощью указанной системы можно дать естественную интерпретацию росту энтропии в скачках уплотнения, где часть кинетической энергии газообразной компоненты в скачке переходит в тепло. С резким ростом температуры  $T_g$  часть энергии передается радиационной компоненте (данный эффект описывается вторым слагаемым в правых частях уравнений (3) и (4)) и рассеивается с помощью механизма теплопроводности (первое слагаемое в правой части уравнения (4)).

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ ПРИМЕНЕНИЯ МОДЕЛИ

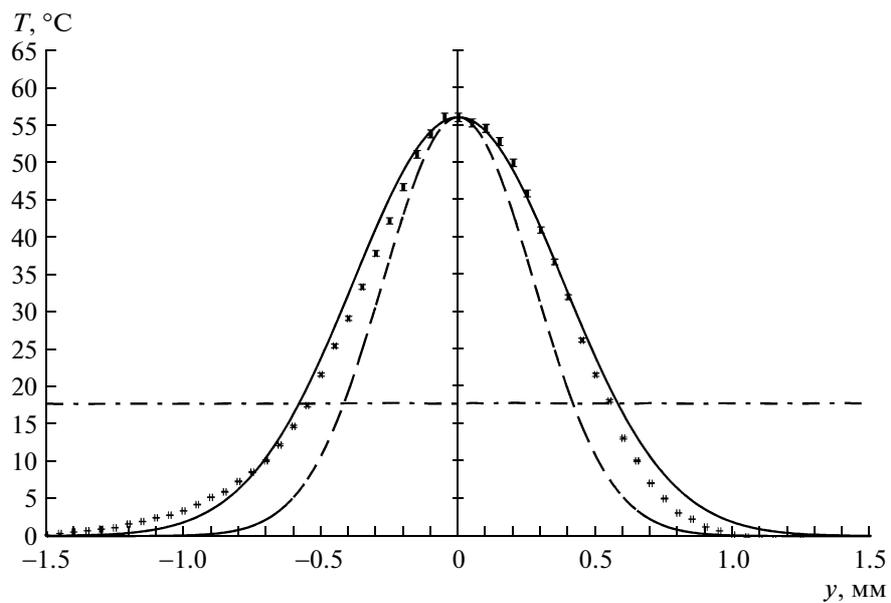
Представим аналитическое и численное решение модельной задачи расширения теплового следа в ламинарном потоке газа за сильно нагретой нитью. В проведенных ранее экспериментальных исследованиях этой задачи (см. [24], [25]) был обнаружен эффект аномально интенсивного расширения теплового следа. В частности, выполненная в [25] обработка экспериментальных результатов показала, что интенсивность расширения теплового следа (величина дисперсии в следе) в 2.8 раза превышает свою величину, соответствующую чисто молекулярной диффузии.

В течение последних двух лет на специально созданной экспериментальной установке в ЦИАМ был выполнен широкий комплекс исследований указанного выше эффекта (см. [26]), который полностью подтвердил выводы работы [26]. Ниже наряду с характерными экспериментальными данными приведены аналитические и численные результаты решения этой задачи на основе системы уравнений предыдущего раздела.

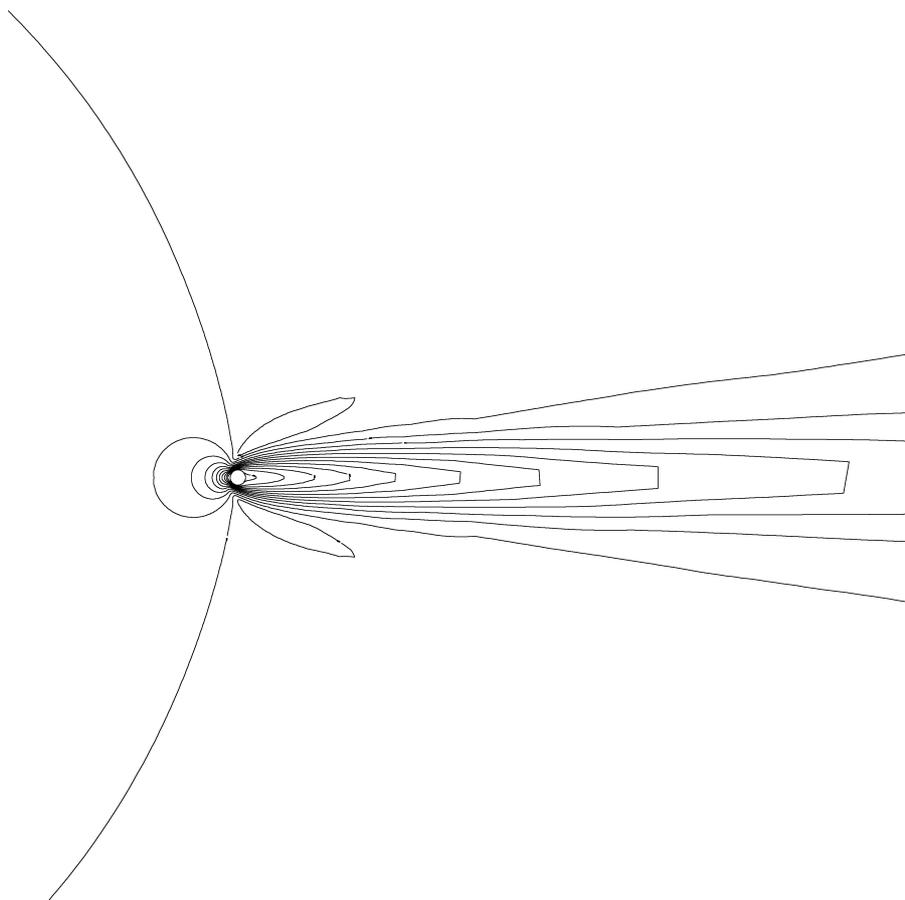
Опишем кратко аналитическое решение уравнения переноса тепла для слабовозмущенного течения:

$$U \frac{\partial T}{\partial x} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (7)$$

Здесь  $U$  – невозмущенная скорость потока,  $\lambda$  – коэффициент температуропроводности.

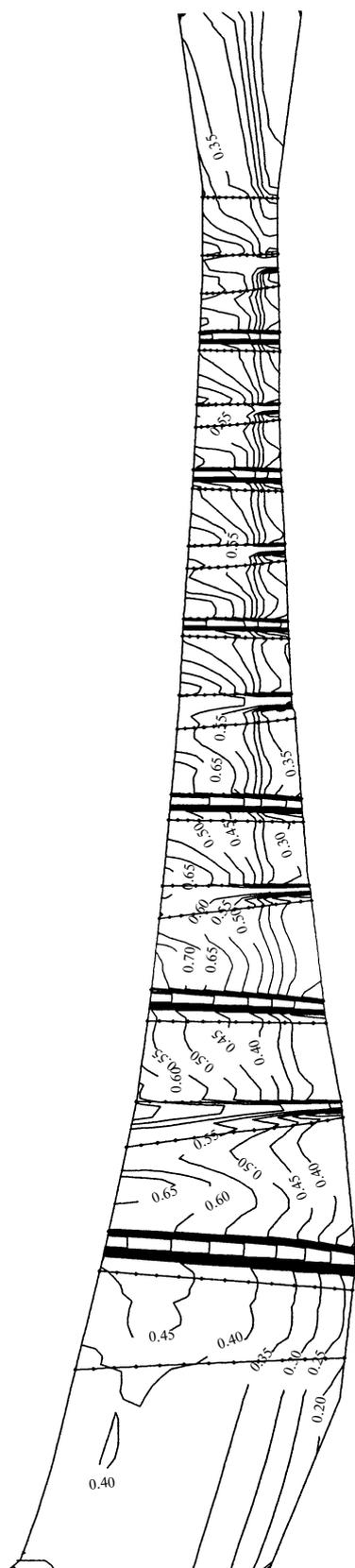


Фиг. 1.

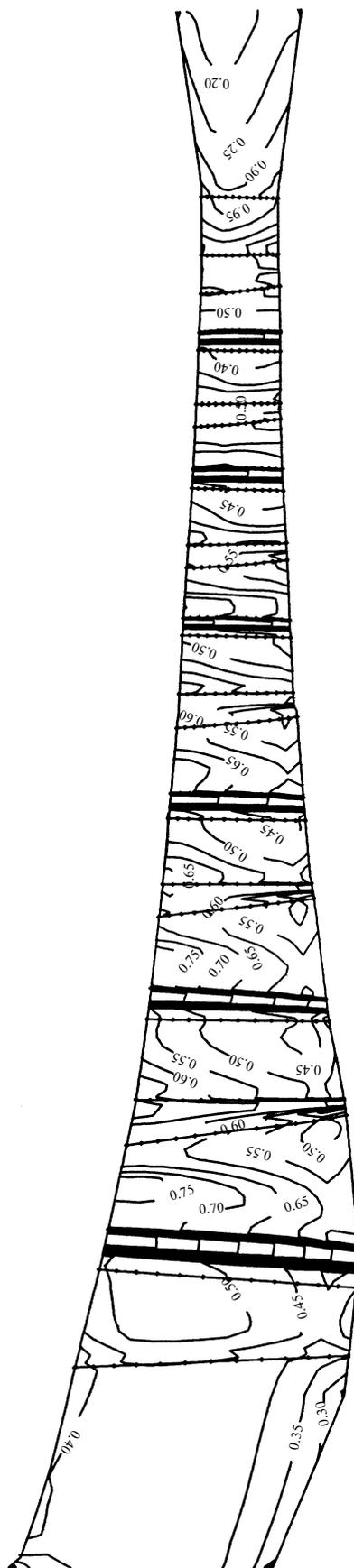


Фиг. 2.





Фиг. 5.



Фиг. 6.

Вводя автомодельную координату  $\eta = y/\sqrt{x}$  и представляя температуру в виде  $T = \Phi(\eta)/\sqrt{x}$ , несложно проинтегрировать уравнение (7) (см., например, [24]) и получить для температуры распределение типа “нормального закона” Гаусса

$$T = T_0 \exp[-Uy^2/(4\lambda x)], \quad (8)$$

где  $T_0$  — максимальная температура в центре теплового следа.

Численное решение данной задачи получено путем интегрирования двумерной системы уравнений Навье–Стокса методом Годунова высокого порядка точности (см. [27], [28]). На фиг. 1 показаны характерные результаты по распределению профиля температуры в ламинарном потоке, обтекающем нагретую до  $T = 805^\circ\text{C}$  нихромовую нить с диаметром  $\varnothing = 0.145$  мм. Нить располагалась на срезе сужающегося сопла, спроектированного по методике Витошинского. Скорость потока воздуха на срезе сопла составляла  $V = 15$  м/с. Приведено распределение избыточной температуры в плоском сечении на расстоянии  $x = 4.0$  мм (температура потока) от нити. Звездочки — данные эксперимента, сплошная линия — расчет, скорректированный с учетом лучистой составляющей по формуле (8), штриховая — расчет по уравнениям Навье–Стокса (без влияния лучистой составляющей). Приведенные данные наглядно демонстрируют необходимость учета влияния лучистой составляющей (в соответствии с изложенной выше методологией). Фиг. 2 демонстрирует рассчитанные по уравнениям Навье–Стокса линии постоянства скорости при ламинарном режиме обтекания нагретой нити.

Следующие результаты относятся к моделированию термогазодинамического процесса, реализующегося в полном тракте авиационного газотурбинного двигателя (см. [29]). На фиг. 3 показана схема проточной части многорежимного двигателя с малой степенью двухконтурности  $m = 0.17$ . Двигатель имеет трехступенчатый вентилятор, шестиступенчатый компрессор, основную кольцевую камеру сгорания, одноступенчатые турбины высокого и низкого давления, форсажную камеру и сопло. Рассчитанное распределение линий тока по всему тракту двигателя представлено на фиг. 4.

На фиг. 5 и 6 приведены результаты расчета в виде линий постоянства числа Маха в меридиональной плоскости компрессора высокого давления. Наличие эффекта лучистой составляющей приводит к дросселированию течения в компрессоре. На фиг. 5 видна зона пониженных скоростей потока у втулочной части компрессора. Для компенсации данного нежелательного эффекта был раскрыт на  $1.5^\circ$  сопловой аппарат турбины высокого давления, что позволило получить расчетный режим работы двигателя (фиг. 6).

Приведенные результаты демонстрируют работоспособность предложенной модели учета эффектов влияния лучистой теплопроводности при решении газодинамических проблем.

Автор выражает признательность Р.З. Нигматуллину, И.В. Цветкову и Б.О. Муравьеву за помощь в работе.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дородницын А.А. Основы теории пограничного слоя и теплообмена. М.: МФТИ, 1968.
2. Дородницын А.А. Об одном методе численного решения некоторых нелинейных задач аэрогидродинамики // Тр. III Всес. матем. съезда. М.: Изд-во АН СССР, 1958. Т. 3. С. 447–453.
3. Dorodnitsin A.A. Method of integral relations for the numerical solution of partial differential equations // *Appl. Advanced Numer. Analys. Digital Comput. Problems*. Ann. Arbor: Univ. Michigan, 1958. P. 281–306.
4. Белоцерковский О.М. Расчет обтекания кругового цилиндра // *Вычисл. матем.* 1958. № 3. М.: ВЦ АН СССР, С. 149–185.
5. Белоцерковский О.М., Чушкин П.И. Численный метод интегральных соотношений // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1962. Т. 2. № 5. С. 731–759.
6. Чушкин П.И. Расчет некоторых звуковых течений газа // *Прикл. матем. и механ.* 1957. Т. 21. № 3. С. 353–360.
7. Чушкин П.И. Метод интегральных соотношений для сверхзвуковых пространственных течений // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1968. Т. 8. № 4. С. 853–864.
8. Дородницын А.А. Ламинарный пограничный слой в сжимаемом газе // *Докл. АН СССР*. 1942. Т. 34. № 8. С. 234–242.
9. Дородницын А.А. Пограничный слой в сжимаемом газе // *Прикл. матем. и механ.* 1942. Т. 6. Вып. 6. С. 449–486.
10. Соколова И.Н. Температура пластинки в сверхзвуковом потоке с учетом излучения // *Теор. работы по аэродинамике*. М.: Оборонгиз, 1957. С. 206–221.

11. Соколова И.Н. Температура конуса в сверхзвуковом потоке с учетом излучения // Теор. работы по аэродинамике. М.: Оборонгиз, 1957. С. 222–229.
12. Годунов С.К. Термодинамика газов и дифференциальные уравнения // Успехи матем. наук. 1959. Т. 14. Вып. 5(89). С. 97–116.
13. Годунов С.К. О понятии обобщенного решения // Докл. АН СССР. 1960. Т. 134. № 6. С. 1279–1282.
14. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
15. Иванов М.Я. К расчету течения газа в ударной трубе переменного течения // Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа. 1970. № 3. С. 162–166.
16. Годунов С.К., Роменский Е.И. Элементы механики сплошной среды и законы сохранения. Новосибирск: Научн. книга, 1998.
17. Годунов С.К., Гордиенко В.М. Простейшие галилеево-инвариантные и термодинамически согласованные законы сохранения // Прикл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 43. № 1. С. 3–16.
18. Роменский Е.И. Термодинамически согласованные законы сохранения моделей многофазных сплошных сред // Матем. в приложениях. Новосибирск, 2009. С. 221.
19. Иванов М.Я. О законах сохранения и термодинамике рабочего процесса высокотемпературных ГТД // Матем. в приложениях, Новосибирск, 2009. С. 120–121.
20. Жуков В.Т., Забродин А.В., Феодоритова О.Б. Метод решения нестационарных двумерных уравнений газовой динамики с теплопроводностью в областях сложной формы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1993. Т. 33. № 8. С. 1240–1250.
21. Жуков В.Т., Феодоритова О.Б. Программа расчета газодинамики НЗТ // Матем. в приложениях. Новосибирск, 2009. С. 116–117.
22. Методика численного моделирования двумерных нестационарных течений теплопроводного газа в трехтемпературном приближении в областях сложной формы с подвижными частицами (НЗТ). М.: ИПМатем РАН, 2008.
23. Роменский Е.И. Термодинамически согласованные законы сохранения моделей многофазных сплошных сред // Матем. в приложениях. Новосибирск, 2009. С. 221.
24. Трубчиков Б.Я. Тепловой метод измерения турбулентности в аэродинамических трубах. М.: Тр. ЦАГИ, 1938. Вып. 372.
25. Иванов Ю.А., Крашенинников С.Ю. К вопросу об определении характеристик турбулентности с помощью диффузионных измерений // Изв. РАН. Механ. жидкости и газа. 1970. № 3. С. 89–96.
26. Белов С.В., Иванов М.Я., Цветков И.В. и др. Методика определения коэффициента теплопередачи и параметров теплового следа за сильно нагретыми телами // Техн. отчет ЦИАМ. 2009. № 300-5723. С. 195–208.
27. Иванов М.Я., Нигматуллин Р.З. Неявная схема С.К. Годунова повышенной точности для численного интегрирования уравнений Эйлера // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1987. Т. 27. № 11. С. 1725–1735.
28. Иванов М.Я., Крупа В.Г., Нигматуллин Р.З. Неявная схема С.К. Годунова повышенной точности для интегрирования уравнений Навье–Стокса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29. № 6. С. 888–901.
29. Иванов М.Я., Нигматуллин Р.З. Моделирование рабочего процесса в тракте газотурбинного двигателя // Успехи механ. сплошных сред. Владивосток: Дальнаука, 2009. С. 221–253.