

М.Я. Иванов, Л.В. Терентьева

ЭЛЕМЕНТЫ ГАЗОДИНАМИКИ
ДИСПЕРГИРУЮЩЕЙ СРЕДЫ



URSS.ru

A standard linear barcode with vertical bars of varying widths. Below the barcode is a series of numbers.

2100001 676063

М.Я. Иванов, Л.В. Терентьева

ЭЛЕМЕНТЫ ГАЗОДИНАМИКИ ДИСПЕРГИРУЮЩЕЙ СРЕДЫ

Москва
Информконверсия
2002

УДК 533.6:541.18.05

ББК 22.365

И.20

Р е ц е н з е н т ы :

А.Е. Зарянкин, заслуженный деятель науки РФ,
д-р техн. наук, профессор
В.И. Киреев, заслуженный деятель науки РФ,
д-р физ.-мат. наук, профессор

Иванов М.Я., Терентьева Л.В. Элементы газодинамики диспергирующей среды. Информконверсия, 2002. (Научная библиотека журнала "Конверсия в машиностроении", вып.7, приложение к журналу № 6, 2002).

Излагаются элементы теории движения газообразной сплошной среды при существенном влиянии дисперсионных эффектов, связанных с микроструктурой среды или с наличием собственных силовых полей электромагнитной или гравитационной природы. Подробно анализируются точные стационарные решения нелинейных уравнений в окрестности фронтов перехода и в форме уединенных волн – классических и частицеподобных солитонов. Демонстрируются возможности построения разнообразных газодинамических моделей – от акустической теории относительности и сверхкритического аналога специальной теории относительности до модели ньютоновской темной материи и микроструктурной модели турбулентности. Общие закономерности изучаемых процессов иллюстрируются рядом примеров из газовой динамики и физики.

ISBN 5 – 93656 – 007 – 4

© ООО "Информконверсия", 2002
© Иванов М.Я., Терентьева Л.В., 2002

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
Введение	9
Глава I. Исходные предпосылки.....	12
§1. Время	12
Абсолютность и одномерность. Однородность. Однонаправленность. Абстрактность и бесконечность.	
§2. Пространство	14
Абсолютность, трехмерность, изотропность и однородность. Абстрактность и бесконечность. Инвариантный интервал. Опытные данные.	
§3. Примеры	16
Абсолютная система координат. Независимые координаты на плоскости. Комплексная плоскость. Пример зависимых временной и пространственной координат. Псевдоевклидово пространство. Пространства однородной статической Вселенной.	
§4. Материя	23
Состав материи. Барионная материя. Темная материя. Ньютоновская темная материя. Механические модели.	
§5. Движение.....	31
Аксиомы движения и принцип детерминированности Ньютона. Субстанциональная (полная) производная. О взаимодействии барионной и суббарийонной материи.	
§6. Относительность.....	35
Принцип относительности Галилея. Принцип относительности Эйнштейна. О принципах ковариантности и эквивалентности.	
§7. Инвариантность	40
Инвариантность пространственного и «гиперболического» интервала. Группа преобразований Галилея. Преобразования Лоренца.	
§8. Взаимодействия	47
Скалярные и векторные поля. Гидродинамическое взаимодействие. Электромагнитное взаимодействие.	

Пример взаимодействия с сопряженными полями. Гравитационное взаимодействие.		
§9. Факты	55	
Темная материя. Реликтовое излучение. Дипольная анизотропия «нового эфира». Сверхсветовые импульсы. Гамма – всплески. Космические лучи. Космические струи.		
§10. Гипотезы	59	
Абсолютизация скорости распространения слабых взаимодействий. Относительность времени и пространства. $E = mc^2$. Кривизна пространства – времени и дополнительные измерения. Темная энергия и квинтэсенция.		
Выводы	63	
Глава II. Квазилинейные модели гидродинамического типа	65	
§11. Гидродинамическая среда с микроструктурной дисперсией	65	
Приближение сплошности. Интегральные законы сохранения. Дифференциальные законы сохранения. О микроструктурной дисперсии. Микроструктурная дисперсия в модели Бюргерса. Микроструктурная дисперсия в гидродинамической модели.		
§12. Плазма с электрическим взаимодействием	73	
Дваждыкостное приближение. Преобразование уравнений движения ионов. Одномерная система уравнений движения ионного газа.		
§13. Замагниченная плазма низкого давления	76	
Гидродинамическое приближение. Уравнение для ионно-звуковых солитонов.		
§14. Гравитирующая среда	78	
Гравитационная частота и период. Гидродинамическая система уравнений гравитирующей среды.		
§15. Моделирование солитонов	80	
Модельные уравнения для солитонов. Инвариантное уравнение.		
Выводы	82	
Глава III. Точные решения	83	
§16. Эффекты микроструктурной дисперсии	83	
Структура стационарных решений. Фронты перехода.		
§17. Плазменные волны	87	
Структура стационарных решений. Солитонные частицеподобные решения. Сверхзвуковые солитоны.		
§18. Солитоны в замагниченной плазме	95	
Структура стационарных решений. Ионно-звуковые солитоны. Другие возможные решения.		
§19. Гравитационное воздействие	100	
Структура стационарных решений. Периодические волны.		
§20. Инвариантные солитоны	103	
Структура стационарных решений. Солитоны. Задача о распаде начального сжатия.		
Выводы	107	
Глава IV. Линеаризованные модели	108	
§21. Гиперболические числа на плоскости	108	
Сверхкритические числа. Докритические числа. Преобразование вращения в плоскости гиперболического аргумента. Сверхкритические и докритические преобразования Лоренца.		
§22. Функции гиперболического аргумента	112	
Условия дифференцируемости функций. Примеры сопряженных гиперболических функций.		
§23. Гиперболические и комплексные четырехмерные аргументы	114	
Покоординатная форма. Векторная форма.		
§24. Функции четырехмерного аргумента	116	
Условия дифференцируемости. Сопряженные поля. Расширенные уравнения Максвелла. Четырехмерные уравнения Лапласа.		
§25. Расширенная Лоренц – инвариантность	119	
Характеристические переменные. Преобразования вращения. Сверхкритические преобразования Лоренца (4-х мерный случай)		
Выводы	124	
Глава V. Моделирование некоторых физических процессов	125	
§26. Одномерная микроструктурная турбулентность	125	
Критическое число Рейнольдса. Дисперсионное соотношение. Численные решения.		
§27. Солитоны в плазме	131	

Сверхзвуковые и частицеподобные изолированные импульсы. Взаимодействие с резонансными частицами. Экранирование отрицательного заряда.	
§28. Акустическая теория относительности.....	134
Исходные уравнения. «Акустический» фактор Лоренца. Двумерный вариант АТО. Замедление времени и сокращение длины.	
§29. Распространение СТО на область сверхсветовых скоростей.....	140
Элементы «сверхсветового» аналога СТО. Вариант СТО с предельным переходом к ньютоновской механике.	
§30. Тахионы с вещественной массой.....	143
Тахионы с мнимой массой покоя. Тахионы в расширенной СТО. О световом (критическом) барьере.	
Выводы.....	148
Дополнение. О возможности моделирования в рамках классического (ニュートンовского) подхода ряда физических и астрофизических явлений.....	150
Моделирование гамма-всплесков. Космические частицы сверхвысоких энергий. Космические струи. Уединенные и периодические волны. О корпускулярно – волновом дуализме. Возможные агрегатные состояния ТМ.	
Заключение	157
Литература	158

ПРЕДИСЛОВИЕ

В теоретической газовой динамике широко используются разнообразные модели сплошной легкоподвижной среды [1-7]. Укажем, прежде всего, модель идеального газа и жидкости, в которой пренебрегается эффектами вязкости и теплопроводности. Движение идеального газа описывается системой уравнений, полученной в середине XVIII века Леонардом Эйлером. Эффекты вязкости и теплопроводности учитываются в моделях гидродинамики, опирающихся на уравнения Навье – Стокса, которые были выписаны в первой половине XIX века. Помимо указанных эффектов диссипативного характера при моделировании газообразной среды в ряде случаев необходим учет дисперсионных эффектов. Примерами диспергирующих сред могут служить газы и жидкости, в которых протекают различные релаксационные процессы, плазменные среды, магнитодинамические среды, упругие и гидродинамические среды с микроструктурой и др. [8-11]. Наличие в газообразной среде собственных силовых полей электромагнитной или гравитационной природы также приводит обычно к ярко выраженным дисперсионным эффектам. Описанию моделей и свойств таких диспергирующих газообразных сред посвящена настоящая монография.

Важной характерной особенностью представления материала монографии является широкое использование аналогии между механическими (классическими газодинамическими) и физическими (электродинамическими, астрофизическими) процессами. Использование подобной аналогии продолжает направление хорошо известных электрогидродинамических аналогий [12, 13] и газодинамических решений астрофизических проблем [14]. Прежде всего, данное направление проиллюстрировано в монографии построением Акустической Теории Относительности (ATO) и распространением Специальной Теории Относительности (СТО) на область сверхсветовых скоростей [15, 16]. Дальнейшие обобщения подобного типа представлены приближением Ньютоновской Темной Материи (НТМ) [17, 18], а также моделированием космических струй, всплесков гамма излучения, космических лучей сверхвысоких энергий и корпускулярно-волнового дуализма излучения и вещества [19-22].

Большое внимание в монографии уделено исследованию точных решений нелинейных уравнений газообразной диспергирующей среды [23-28]. Подробно изучены классические и частицеподобные решения

солитонного типа. Рассмотрено простейшее инвариантное уравнение, моделирующее эффекты нелинейности, вязкости и дисперсии [29, 30]. Это уравнение инвариантно относительно группы преобразований Галилея [7]. Солитонные решения инвариантного уравнения представляют простейшую модель нейтрино, распространяющихся в НТМ [20, 21]. Аналогичное уравнение использовано также в качестве модельного для описания микроструктурной турбулентности и микромасштабного способа замыкания проблемы расчета турбулентных течений [31, 32].

Авторы подчеркивают, что многие из рассмотренных моделей физических процессов (газодинамических, плазменных и астрофизических) носят достаточно условный характер, близкий к гипотетическому. Однако они сочли возможным публикацию данного материала (наряду с аккуратными точными решениями), чтобы привлечь внимание к возможности моделирования ряда необъясенных к настоящему времени физических проблем в рамках ньютоновской механики с помощью уравнений, описывающих эффекты нелинейности и дисперсии.

Авторы выражают глубокую признательность Г.Г. Черному за многократные плодотворные обсуждения основных вопросов, рассмотренных в этой книге, на научных семинарах под его руководством в ЦИАМ и НИИ Механики МГУ. Дискуссии с В.И. Карпманом, А.Н. Крайко, А.Б. Ватажиным, В.А. Левиным, Р.З. Нигматуллиным, Ф.А. Слободкиной и И.В. Краснослободцевым позволили более тщательно представить ряд аспектов теории диспергирующих сплошных сред.

Успешное выполнение исследований, составивших содержание монографии, было бы невозможно без поддержки руководства ЦИАМ и, прежде всего, Генерального директора ЦИАМ В.А. Скибина. Этому, несомненно, способствовала также доброжелательная научная атмосфера института и наличие блестящих научных школ по теоретической газовой динамике.

Неоценимая помощь в подготовке монографии авторам была оказана Б.О. Муравьевым.

Всем вышеперечисленным товарищам и своим коллегам в исследованиях изложенных в монографии вопросов авторы выражают искреннюю благодарность.

ВВЕДЕНИЕ

«Сводя все к чисто механической идее движения некоторой воображаемой жидкости, я надеюсь достигнуть общности и точности и избежать тех опасностей, которые возникают при попытках с помощью преждевременной теории объяснить причины явлений».

Д.К. Максвелл «*О фарадеевых силовых линиях*»
([12], стр. 17)

Динамика диспергирующих легкоподвижных сред обуславливает многие физические явления. Теория движения таких сред при наличии собственных силовых полей электрической или гравитационной природы неразрывно связана с физическими теориями электромагнетизма и тяготения. Отметим кратко некоторые аспекты развития механики сплошной среды и теоретической физики, важные с точки зрения материала монографии.

До начала XX века теоретическая гидрогазодинамика и физика электромагнитных и гравитационных явлений опирались всецело на ньютоновскую механику и часто способствовали развитию друг друга. Ярким примером демонстрации этого факта служат работы Д.К. Максвеля по теории электромагнетизма [12], в которых все основные результаты получены, исходя из аналогии с движением несжимаемой жидкости. В статье Д. Максвеля «*О фарадеевых силовых линиях*» читаем ([12], стр. 16): «Метод представления интенсивности силы скоростью воображаемого потока жидкости в трубке применим ко всякой системе сил; но он дает большие упрощения в частном случае сил, обратно пропорциональных квадрату расстояния, что имеет место в электрических или магнитных явлениях».

Однако в начале XX столетия пути развития этих теорий начинают резко расходитьсяся. Гидрогазодинамика продолжает, в основном, следовать курсу классической механики Ньютона, а теоретическая физика безоговорочно переходит на релятивистские принципы. Характеризуя указанный период, Л. Больцман в статье «*О развитии теоретической физики в новейшее время*» ([33], стр. 355) восклицает: «...я остался последним среди тех, которые еще всей душой принимали старое; во всяком случае, я – последний, кто еще по возможности борется за это старое. Свою жизненную задачу я усматриваю в следующем: путем возможно более ясной, логически упорядоченной разработки результатов старой классической теории способствовать, поскольку это в моих

силах, тому, чтобы в будущем не пришлось открывать заново многое хорошее и все еще пригодное, что, по моему убеждению, содержится в этой теории, как это неоднократно случалось в истории науки.»

В течение XX века теоретическая гидрогазодинамика, изучая, в основном, движение барионной материи, достигла высочайшего уровня развития и обусловила успех разработки авиационно-космической техники и освоения воздушного и ближайшего к Земле космического пространства. Теорией гидрогазодинамики и практикой ее использования был, в частности, успешно преодолен «звуковой барьер».

Теоретическая физика в течение XX века прочно закрепилась на позициях релятивизма. Одним из узловых постулатов современной теоретической физики о невозможности передачи сигнала со скоростью, превышающей скорость света в пустоте (или невозможность движения материальных частиц со сверхсветовой скоростью) был создан непреодолимый «звуковой барьер». В основе этого барьера лежат преобразования Лоренца, приводящие к бесконечным значениям массы, импульса и энергии материальных частиц при световых значениях скорости. К сожалению, современная физика остановилась только на «докритических» преобразованиях Лоренца, когда, следуя А. Эйнштейну, рассматривается только преобразование вращения по часовой стрелке в пространственно-временной плоскости. Рассмотрение таких же преобразований вращения против часовой стрелки приводит к «сверхкритическим» преобразованиям Лоренца и существенно расширяет рамки традиционного релятивизма. Следуя методологии газовой динамики, можно легко построить модель перехода через критический световой барьер и тем самым создать теоретическую основу для дальнейшего изучения и моделирования физических явлений.

В последние десятилетия интенсивнейшее развитие техники физического эксперимента и накопление новых, часто сенсационных, астрономических данных привело вновь, подобно началу XX века, к острой критической ситуации с теоретическим обоснованием результатов целого ряда физических и астрофизических экспериментов. Многие полученные опытные данные не находят своего объяснения в рамках современных Стандартных Моделей (СМ) теоретической физики. В связи с чем сегодня предлагаются теоретические построения «за пределами» СМ (см., например, [34-36]).

В то же время, следуя процитированным выше замечаниям Д. Максвелла и Л. Больцмана, можно серьезно рассмотреть возможность объяснения многих загадочных явлений в рамках классической ньютоновской механики. Указанная возможность на примере развития

теории движения диспергирующей газообразной материи (на барионном и суббарионном уровнях) рассматривается в настоящей монографии. При этом одним из основополагающих моментов в теории является утверждение («антипостулат»):

Скорость распространения сильного сигнала может превышать скорость распространения слабого сигнала.

В качестве сильного сигнала здесь может выступать любое сильное возмущение, взаимодействие или нелинейная волна. Предполагается также наличие сигналонесущей среды (барионного или суббарионного вида).

ГЛАВА I. ИСХОДНЫЕ ПРЕДПОСЫЛКИ

Теоретические модели нелинейных дисперсионных процессов, рассматриваемые ниже, всецело опираются на экспериментальные факты и принципы ньютоновской механики. За независимые переменные при описании этих процессов берутся время t и три пространственные координаты x, y, z , т.е. движение материальной среды предполагается в трехмерном евклидовом пространстве. Учитывая фундаментальность понятий времени и пространства и широкую дискуссию по этому вопросу, развернувшуюся в XX веке, остановимся кратко на данном вопросе и ряде других, важных с точки зрения тематики настоящей монографии (в частности, на понятиях суббарионной темной материи и темной энергии, на принципе относительности и ряде других принципов).

§1. Время

«Абсолютное, истинное, математическое время само по себе и по своей сущности, без всякого отношения к чему-либо внешнему протекает равномерно и иначе называется длительностью»

Исаак Ньютон «Начала» [37]

«Время не существует само по себе, но в предметах, Мы его чувствуем все, когда в прошлом случилось что-либо, Ныне ли что происходит, иль в будущем следовать будет... И никогда еще не было, кто бы рассматривал время Вне его связи с движением тел и их сладким покоем.»

Лукреций Кар «О природе вещей» [38]

Абсолютность и одномерность. Основным свойством времени в ньютоновской механике является его абсолютность. Это свойство заключается в том, что время не зависит от выбранной системы отсчета. Любой его интервал Δt является абсолютным инвариантом для любых процессов в природе и не зависит от хода рассматриваемых процессов. За характерную единицу времени удобно во многих случаях принять секунду и определить ее как основную единицу измерения времени.

Время одномерно – едино всегда и везде.

Однородность. Другим важным свойством времени является его однородность. Однородность времени характеризует его равномерное

текущее и говорит о равноправности всех моментов времени. Это свойство предоставляет возможность произвольного выбора начала отсчета, т.е. момента времени $t=0$, и характерного интервала измерения времени. Развитие любого процесса удобно изучать от его начальной точки отсчета и характеризовать текущим моментом t , измеряемым с помощью выбранного интервала (единицы измерения). Абсолютное время удобно связать с нашей Вселенной и за начальную точку отсчета выбрать исходный момент Большого Взрыва.

Однонаправленность. Свойство однонаправленности времени состоит в возможности его течения только в одном направлении – в сторону будущего, т.е. роста его величины. Оно не может быть повернуто вспять – в сторону прошлого. Иными словами существует так называемая стрела времени [40] (от прошлого к будущему). При этом выполняется принцип причинности – следствие зависит от причин, его обусловивших, т.е. настоящее положение вещей зависит только от прошедшего и не зависит от будущего. Подчеркнем, что в нашем случае принцип причинности выполняется безусловно и не связан с какой-либо характерной величиной, например, со скоростью света в вакууме (скоростью распространения сигнала или возмущений). В рамках ньютоновской механики скорость света в вакууме не является максимально допустимой величиной скорости передачи информации. Ниже в настоящей монографии данному вопросу уделено большое внимание. Здесь также можно рекомендовать ознакомиться с интересными замечаниями по этому поводу в [41].

Абстрактность и бесконечность. Свойство абстрактности времени прекрасно и наглядно сформулировано Лукрецием Каром в приведенном нами эпиграфе этого параграфа. Свойство бесконечности говорит об отсутствии начала и конца в течении времени.

Итак, мы будем опираться на абсолютное, одномерное, однородное, однонаправленное, бесконечное, абстрактное определение времени. Такое понятие времени лежит в основе ньютоновской механики и широко использовалось на заре развития науки в античной натурфилософии (Левкипп, Демокрит, Эпикур, Лукреций Кар). Переход от «математического» абстрактного времени к «физическому» времени связан с выбором начальной точки отсчета и интервала измерения времени.

§2. Пространство

«Абсолютное пространство по самой своей сущности, безотносительно к чему бы то ни было внешнему, остается всегда одинаковым и неподвижным...»

Исаак Ньютона «Начала» [37]

«Нет никакого конца ни с одной стороны у вселенной,
Ибо иначе края непременно она бы имела;
Края же не может иметь, очевидно, ничто, если только
Вне его нет ничего, что его отделяет, что б видно
Было, доколе следить за ним наше чувство способно...
И безразлично, в какой ты находишься части вселен-
ной...»

Лукреций Кар «О природе вещей» [39]

Абсолютность, трехмерность, изотропность и однородность.

Весьма привычное в обыденной нашей жизни абсолютное трехмерное евклидово пространство лежит и в основе ньютоновской классической механики. Оно является изотропным и однородным. Все точки пространства и все направления в нем равноправны. Эти свойства пространства позволяют произвольно выбрать начальную точку системы трех независимых евклидовских координат x, y, z , (например, прямоугольных декартовых) и направления координатных осей. Начало координат абсолютного пространства удобно совместить с начальной точкой пространства, в которой был сконцентрирован в пределе Большой Взрыв. При этом вопрос выбора направления координатных осей изотропного абсолютного пространства не будет существенным. Все другие координатные системы следует рассматривать относительно выбранной единой абсолютной системы.

Абстрактность и бесконечность. Пространство является абстрактным и бесконечным. Подобно времени оно «не существует само по себе, но в предметах мы его чувствуем». Пространство во всем направлениям бесконечно. Так же, как и в случае временной переменной переход от «математического» абстрактного пространства к «физическому» пространству связан с выбором системы пространственных координат и единиц измерения длины.

Инвариантный интервал. Основным геометрическим инвариантом при переходе от абсолютной системы декартовых координат к другой декартовой системе будет величина

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2, \quad (2.1)$$

которая однозначно определяет расстояние $|\Delta s|$ между двумя точками пространства. При этом переход от одной системы координат к другой осуществляется при фиксированном времени, когда положение точек в пространстве фиксировано.

Основной итог краткого рассмотрения понятий времени и пространства сводится к следующему. Все изучаемые нами природные процессы характеризуются четырьмя независимыми переменными: абсолютным временем t и тремя абсолютными евклидовыми координатами x, y, z . Инвариантными величинами при переходе от одной системы к другой являются временной интервал Δt между двумя событиями в фиксированной точке пространства и пространственный интервал $|\Delta s|$ между двумя точками пространства в фиксированный момент времени. Начало отсчета абсолютного времени и начало абсолютной системы пространственных координат и их направления выбираются произвольно, исходя из удобства изучения рассматриваемого физического процесса. Как уже было отмечено, в случае нашей Метагалактики (видимой Вселенной) удобно рассматривать абсолютную систему координат, у которой начальная точка отсчета времени и пространственных координат совмещена с начальной точкой Большого Взрыва.

Можно рассматривать также четырехмерное аффинное пространство (см., например, [42]), в котором мировая точка задается четырьмя независимыми координатами t, x, y, z . При этом можно ввести инвариантный интервал

$$\Delta s_1^2 = c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \quad (2.2)$$

Однако в нашем случае абсолютного времени и пространства и в силу инвариантности по отдельности интервала времени Δt и пространственного интервала $|\Delta s|$, инвариантность расширенного интервала (2.2) выполняется автоматически.

Опытные данные. Приведем несколько экспериментальных подтверждений евклидовости и трехмерности нашего пространства. Последние тщательные эксперименты по мелкомасштабным флуктуациям реликтового микроволнового излучения показали его изотропию с точностью до 10^{-4} К и подтвердили евклидову (плоскую) геометрию Вселенной. Распределение углового спектра мощности флуктуаций реликтового излучения имеет ярко выраженный первый пик, соответствующий углу в 1 градус, что в пересчете говорит о плоской геометрии нашей Метагалактики [43, 44].

Трехмерность пространства подтверждается справедливостью закона обратных квадратов в теории тяготения, электростатике и гидродинамике. Сферически симметричное векторное поле \bar{v} от источника, зависящее только от радиальной координаты R , определяется уравнением

$$\operatorname{div} \bar{v} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 v_R) = 0$$

и имеет решение $v_R = C / R^2$, где C – константа, зависящая от интенсивности источника.

Площадь замкнутой сферической поверхности радиуса R равна $4\pi R^2$ только для трехмерного случая. Площадь гиперсферической поверхности пропорциональна другим степеням радиуса для пространств с другим количеством измерений. Выполнимость закона тяготения Ньютона, закона Кулона и закона изменения скоростного поля источника и стока для несжимаемой жидкости в нашем пространстве (закона обратных квадратов) доказывает его трехмерность.

§3. Примеры

Рассмотрим в настоящем параграфе несколько примеров независимых и зависимых систем координат. Учитывая принципиальную важность этого вопроса, постараемся изложить его с предельной ясностью.

Абсолютная система координат. Абсолютную систему независимых координат и времени для нашей Метагалактики, как уже было отмечено, удобно совместить с полученной в пределе начальной точкой Большого Взрыва. Направления трех пространственных независимых координатных осей можно выбирать произвольно. Подобную систему в прошлые века называли «телом α », причем были сформулированы конкретные предложения и по направлениям координатных осей. Любую другую координатную систему тогда следует определять относительно данной установленной абсолютной системы. Абсолютное математическое пространство евклидово, имеет инвариантный интервал, задаваемый соотношением (2.1).

Независимые координаты на плоскости. Рассмотрим двумерный частный случай независимых пространственных координат. Положение материальной точки на плоскости в декартовых координатах x и y определяется радиус-вектором

$$\bar{r} = x \bar{i} + y \bar{j}, \quad (3.1)$$

где \bar{i} и \bar{j} – единичные векторы (орты) в направлении координатных осей Ox и Oy . Значения координат x и y в общем случае являются независимыми величинами. Движение материальной точки характеризуется скоростью \bar{v} , определяемой через первую производную по скалярному аргументу t ,

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \bar{i} + \frac{dy}{dt} \bar{j} = u \bar{i} + v \bar{j} \quad (3.2)$$

и ускорением

$$\bar{w} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{du}{dt} \bar{i} + \frac{dv}{dt} \bar{j}. \quad (3.3)$$

Здесь u и v компоненты вектора скорости на оси Ox и Oy . В общем случае произвольного движения материальной точки компоненты скорости являются также «независимыми» друг от друга величинами. «Независимыми» друг от друга величинами являются компоненты на осях x и y вектора ускорения \bar{w} . Здесь под «независимыми» величинами понимается то, что закон сохранения количества движения является векторным законом и содержит в себе столько скалярных «независимых» уравнений, сколько независимых пространственных координат имеет наша задача. Для двумерного и трехмерного случаев имеем соответственно два и три скалярных уравнения сохранения количества движения. Подчеркнем еще раз, что дифференцирование в (3.2) и (3.3) выполнялось по независимому скалярному аргументу.

Инвариантный интервал в двумерном случае декартовых координат определяется с помощью теоремы Пифагора

$$\Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2. \quad (3.4)$$

Описание случая двух тривиальных независимых координат x и y на плоскости нам необходимо для сопоставления с комплексными («зависимыми») координатами и для дальнейшей аналогии с «гиперболическими» числами на плоскости двух переменных x и t . Как будет показано ниже, такие «гиперболические» числа играют определяющую роль в теории относительности.

Комплексная плоскость. Интересным и широко распространенным примером «зависимых» координат в двумерном случае являются комплексные числа

$$z = x + iy, \quad z^* = x - iy, \quad (3.5)$$

где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. При этом квадрат модуля комплексного числа выражается как

$$|z|^2 = \rho^2 = z \cdot z^* = x^2 + y^2.$$

Вводя в рассмотрение модуль $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ и аргумент (угол) $\phi = \arctg(y/x)$ комплексного числа z , его можно записать также в экспоненциальной и тригонометрической формах

$$z = \rho e^{i\phi} = \rho(\cos\phi + i\sin\phi).$$

Теория функций комплексного переменного – весьма изящная и хорошо разработанная теория. Здесь только (с учетом интересов монографии) приведем условия аналитичности функций комплексного переменного

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y), \quad (3.6)$$

имеющих форму условий Коши – Римана

$$u_x + v_y = 0, \quad u_y - v_x = 0. \quad (3.7)$$

Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ зависимы и называются гармонически сопряженными функциями. Из (3.7) следуют уравнения Лапласа для каждой из этих функций

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0. \quad (3.8)$$

Уравнения Лапласа можно записать с использованием мнимой единицы в факторизованной форме

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - i \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} + i \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0. \quad (3.9)$$

В связи с таким возможным представлением иногда по аналогии с волновым уравнением говорят, что уравнение Лапласа имеет два семейства мнимых характеристик, причем комплексное число $z = x + iy$ определяет характеристику «левого» семейства, соответствующую оператору в первой скобке выражения (3.9), а сопряженное комплексное число

$z^* = x - iy$ определяет характеристику «правого» семейства, соответствующую оператору во второй скобке (3.9).

Если записать уравнение Лапласа в несколько другой операторной форме, а именно

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) u = 0, \quad (3.10)$$

то тогда имеем следующие уравнения мнимых характеристик

$$z = y + ix, \quad z^* = y - ix, \quad (3.11)$$

соответствующих операторным выражениям в первой и второй скобках соотношения (3.10).

Определение квадрата модуля комплексного числа с помощью соотношения, идентичного теореме Пифагора ($\rho^2 = x^2 + y^2$), и практическая справедливость уравнений Лапласа (и Пуассона) при моделировании широкого круга физических процессов являются основой широкого использования теории функций комплексного переменного (однако, естественно, при этом не утверждается, что координаты x и y на плоскости в самом общем случае (см. предыдущий пункт) потеряли свою независимость).

Пример зависимых временной и пространственной координат. Проделаем важную аналогию между комплексными и вводимыми нами в рассмотрение «гиперболическими» числами (§21). Эта аналогия получается с помощью замены мнимой единицы i на характеристическую скорость распространения сигнала c и одной пространственной координаты (например, y) на временную координату t . При этом от уравнения Лапласа переходим к волновому уравнению Даламбера.

Имеем два вида гиперболических переменных

$$z = x + ct, \quad z^* = x - ct \quad (3.12)$$

и

$$z = ct + x, \quad z^* = ct - x, \quad (3.13)$$

Определим модули гиперболических чисел по формулам: для (3.12) как

$$\rho = |z| = \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{x^2 - c^2 t^2}, \quad (3.14)$$

а для (3.13) как

$$\rho = |z| = \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{c^2 t^2 - x^2}. \quad (3.15)$$

Нам будет ясно из дальнейшего изложения то, что гиперболические числа (3.12) можно назвать сверхкритическими (пространственно подобными) числами, а числа (3.13) – докритическими (временноподобными) числами.

Приведем экспоненциальную и тригонометрическую форму записи гиперболических чисел через гиперболические косинус и синус

$$z = \rho e^{\varphi} = \rho(\operatorname{ch} \varphi + i \operatorname{sh} \varphi), \quad z^* = \rho e^{-\varphi} = \rho(\operatorname{ch} \varphi - i \operatorname{sh} \varphi).$$

Для (3.12) при этом имеем

$$\varphi = \ln \sqrt{\frac{x+ct}{x-ct}}, \quad \operatorname{ch} \varphi = \frac{x}{\rho}, \quad \operatorname{sh} \varphi = \frac{ct}{\rho}, \quad (3.16)$$

а для (3.13)

$$\varphi = \ln \sqrt{\frac{ct+x}{ct-x}}, \quad \operatorname{ch} \varphi = \frac{ct}{\rho}, \quad \operatorname{sh} \varphi = \frac{x}{\rho}. \quad (3.17)$$

Далее нами в §22 будут получены условия дифференцируемости функций гиперболического переменного (числа), которые легко сводятся к волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (3.18)$$

Переписав уравнение (3.18) по аналогии с (3.9) и (3.10) в двух операторных формах

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) u = 0 \quad (3.19)$$

и

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0, \quad (3.20)$$

мы видим, что гиперболические числа (3.12) и (3.13) представляют собой уравнения характеристик соответственно для соотношений в первой и второй скобках (3.19) и (3.20).

Использование преобразований вращения в плоскости гиперболических чисел по аналогии с преобразованиями вращения на плоскости x и y позволит нам получить наряду с традиционными преобразованиями Лоренца (докритическими) также сверхкритический аналог преобразований Лоренца и, далее, распространить Специальную Теорию Относительности (СТО) на область сверхсветовых скоростей, описать тахионы (сверхсветовые) частицы с вещественной массой и построить Акустическую Теорию Относительности (АТО) для областей докритических и сверхкритических скоростей.

Введение в рассмотрение гиперболических чисел нарушает исходную независимость временной и пространственной координат, делает их зависимыми и, как следствие, подчиняет дифференцируемые функции гиперболического переменного требованию справедливости для них волнового уравнения. Это обстоятельство необходимо также учитывать при рассмотрении в качестве моделей физических явлений теории, опирающихся на СТО.

Псевдоевклидово пространство

«М.Г.! Воззрения на пространство и время, которые я намерен перед Вами развить, возникли на экспериментально-физической основе. В этом их сила. Их тенденция радикальна. Отныне пространство само по себе и время само по себе низводятся до роли теней и лишь некоторый вид соединения обоих должен еще сохранить самостоятельность.»

Г. Мinkовский «Пространство и время» [45]

Псевдоевклидово пространство является фундаментом Специальной Теории Относительности (СТО), рассматривающей течение физических процессов в зависимом четырехмерном пространственно-временном мире (четырехмерном аналоге гиперболических докритических чисел, §21). Геометрия этого мира задается инвариантным интервалом

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2, \quad (3.21)$$

где c – скорость света в вакууме. Название «псевдоевклидово пространство» было предложено известными немецкими математиками начала

XX века Ф. Клейном и Д. Гильбертом и объясняется разными знаками временной и пространственной частей соотношения (3.21).

Геометрия пространства – времени, выражаемая инвариантным интервалом (3.21), введена Г. Минковским [45] в 1908 г. В этой работе в качестве аксиомы постулируется положительное значение выражения (3.21) в любой мировой точке, означающее иначе то, что скорость движения объекта (или материальной точки) v всегда меньше c . Важным аспектом псевдоевклидова пространства – времени (мира Минковского) является инвариантность интервала (3.21) относительно группы преобразований Лоренца (см. §7).

Введение в рассмотрение псевдоевклидова пространства позволило развить четырехмерный формализм и с его помощью строить теорию СТО (см., например, [46-48]). Эта теория, как иногда отмечается, содержит революционные элементы по отношению к классической теории Ньютона. Так, в монографии [49] (стр. 64, 65) читаем: «Тот, кто связан путями ньютоновской философии, считает время более фундаментальным понятием, чем свет, и выбор любой системы отсчета, кроме системы, специализированной по времени, кажется ему странным. Революционная идея, которую внесла СТО, состоит в том, что свет играет более важную роль, чем время».

В настоящей монографии показано, что СТО с успехом распространяется также на случаи сверхкритических (сверхсветовых) скоростей $v > c$.

Пространства однородной статической Вселенной

«В своих работах, посвященных общим космологическим вопросам, Эйнштейн и Де-Ситтер приходят к двум мыслимым типам вселенной; Эйнштейн получает так называемый цилиндрический мир, в котором пространство обладает постоянной, не меняющейся с течением времени кривизной, причем радиус кривизны связывается с общей массой материи, расположенной в пространстве; Де-Ситтер получает шаровой мир, в котором уже не только пространство, но и весь мир обладает до известной степени характером мира постоянной кривизны.»

A.A. Фридман «О кривизне пространства» ([49], стр. 229)

Приведем три примера зависимых сферических координат r, θ, ϕ и времени t , использующихся в современной космологии, которые ис-

черпывают, как показал А.А. Фридман [50], все возможные варианты описания статической однородной Вселенной (см., также, [51]).

Вселенная Эйнштейна имеет интервал

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - r^2/R^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (3.22)$$

где R – константа, определяемая через космологическую постоянную Λ и давление p_0 рассматриваемой модели Вселенной ($\Lambda - 8\pi p_0 = 1/R^2$).

Вселенная Де-Ситтера выражается интервалом

$$ds^2 = c^2 (1 - \frac{r^2}{R^2}) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - r^2/R^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (3.23)$$

где $R^2 = 3/(\Lambda + 8\pi \rho_0)$, ρ_0 – равномерно распределенная собственная плотность Вселенной.

Третий вариант статической однородной Вселенной задается псевдоевклидовым интервалом (3.21) в сферических координатах

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (3.24)$$

который получается также из (3.22) и (3.23) при $R \rightarrow \infty$.

Подчеркнем, что во всех приведенных случаях (3.21) – (3.24) величина скорости света в вакууме c играет фундаментальную роль и полагается фундаментальной константой. При этом любое движение в рассмотренных вариантах Вселенной может осуществляться со скоростью v , не превышающей c .

Подробное освещение геометрии пространства – времени в различных вариантах зависимых координат можно найти в [49-57].

§4. Материя

«Значит и нет ничего, куда из Вселенной могла бы скрыться материи часть и откуда внезапно вломиться.»

Лукреций Кар «О природе вещей» [39]

Материализация понятий времени и пространства происходит с помощью реальной материи, заполняющей пространство и изменяющейся во времени. Исходя всецело из накопленных к настоящему моменту экспериментальных фактов, нами в рамках монографии наряду с

обычной и привычной всем барионной материи будет рассматриваться также суббарионная материальная субстанция.

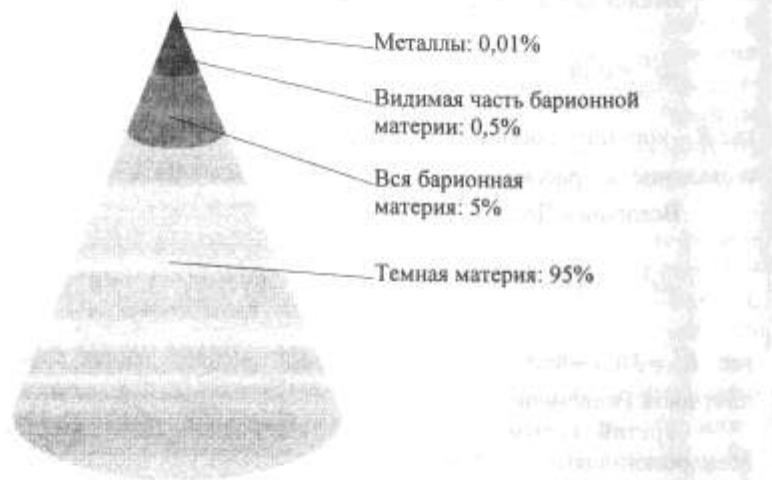


Рис. 4.1. Состав материи в наблюдаемой Вселенной.

Состав материи. Процентный состав материи в нашей Метагалактике (наблюдаемой Вселенной) графически представлен на рис. 4.1. Такой состав с достаточной степенью достоверности обоснован многочисленными опытными данными и рядом теоретических моделей (подробнее по этому вопросу см., например, [58-61]). На долю металлов приходится примерно 0,01% от всей материи Вселенной. Видимая часть барионной материи составляет всего около 0,5% от общего количества зарегистрированной материи. Оценка всей барионной материи, в том числе невидимой (невидимые планеты типа Юпитера, черные дыры и т.п.), дает не более 5% от ее общего количества. Оставшаяся подавляющая часть материи Вселенной, примерно 95%, является невидимой, т.е. не может быть зарегистрирована в оптическом диапазоне электромагнитного излучения (а также в других диапазонах: рентгеновском, ультрафиолетовом, инфракрасном, гамма и радио излучения). В связи с чем эта материя Вселенной носит название Темной Материи – ТМ (Dark Matter – DM). Примерно 30% ТМ сосредоточено около галактик и их скоплений в форме «шарообразной атмосферы» (гало галактик). Оставшаяся часть ТМ, около 65% от общего количества материи, как это обоснованно полагают, распределена достаточно равномерно в свободном пространстве нашей Вселенной. В последние годы эта часть ТМ

отождествляется с Темной Энергией – ТЭ (Dark Energy – DE) или с собой субстанцией - Квантессенцией (Quintessence) [59-62].

Барионная материя. Основными элементарными компонентами барионной материи являются привычные нам протоны и нейтроны (барионы). С процессом образования барионной материи в результате Горячего Большого Взрыва можно познакомиться, к примеру, по прекрасным монографиям [63-65]. Здесь мы только отметим, что в настоящее время барионная материя во Вселенной находится в основном (более 95%) в газообразном (плазменном) состоянии. Около 70% барионной материи во Вселенной представлено атомарным водородом, порядка 25% приходится на долю гелия. Эта барионная материя сосредоточена в горячих газообразных скоплениях около галактик. Теоретическое описание динамики таких горячих скоплений с хорошим приближением можно проводить с помощью методов газовой динамики и физики плазмы. Принципиальным моментом здесь является определение адекватного природе уравнения состояния рассматриваемой газообразной среды, особенно при весьма высоких значениях температур и давлений.

Динамика обычной барионной газообразной среды описывается тремя законами сохранения – массы, количества движения и энергии. Замкнутая постановка задачи получается после задания граничных условий и уравнения состояния газообразной среды. В качестве примера приведем здесь простейшее уравнение состояния совершенного газа

$$p = \rho RT, \quad (4.1)$$

где p – давление, ρ – плотность, T – температура, R – универсальная газовая постоянная. Характерная скорость распространения возмущений – скорость звука – определяется при этом в адабатической среде как

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} = \kappa \frac{p}{\rho} = \kappa \frac{k}{m} T, \quad (4.2)$$

κ – показатель адиабаты, k – постоянная Больцмана ($k=R/N$, N – число Авогадро), m – масса частиц газообразной среды. Зная скорость распространения возмущений и температуру среды, можно определить из (4.2) массу составляющих однородную газообразную среду частиц.

В кинетической теории газов уравнение состояния (4.1) получается как следствие применения законов Ньютона (см., например, [66]).

Темная материя. Проблема ТМ представляет собой в настоящее время одну из самых интересных загадок природы. Как уже было от-

мечено, ТМ составляет не менее 95% всей материи нашей Метагалактики. Предложен ряд теоретических моделей ТМ, основанных на принципах современной физики. Разброс в величине массы частиц ТМ в разных теориях доходит до 78÷80 порядков: от значений массы 10^{-6} eV для сверхлегких (стерильных) аксионов до значений около $10^5 M_0$ (M_0 – масса Солнца) для супер массивных черных дыр (этот диапазон в килограммах измеряется от 10^{-42} до 10^{36} кг).

Перечислим кратко основных кандидатов на роль частиц ТМ. В качестве главного кандидата барионной ТМ выступают Массивные Астрономические Компактные Гало Объекты – МАКГО (Massive Astronomical Compact Halo Objects – MACHO). В их число обычно включают карликовые звезды (белые, черные или коричневые карлики), планеты типа Юпитера, нейтронные звезды и черные дыры. Тщательный анализ суммарного вклада перечисленных барионных объектов в общую массу вещества Вселенной, выполненный в последние годы (см., например, [59-61]), показал, что проблема ТМ не может быть решена на основе только барионной материи. Повторим, что суммарная оценка всей барионной материи Вселенной дает менее 5% от общего количества материи.

Небарионная ТМ обычно делится на две основные категории: Холодная Темная Материя – XTM (Cold Dark Matter – CDM), частицы которой обладают скоростями движения в досветовом диапазоне, и Горячая Темная Материя – ГТМ (Hot Dark Matter – HDM), частицы которой должны иметь релятивистские значения скоростей, близкие скорости света в вакууме. Основными претендентами на роль XTM следует считать класс Слабо Взаимодействующих Массивных Частиц – СВМЧ (Weakly Interacting Massive Particles – WIMP) с массой 1 GeV и более. В настоящее время идут интенсивные поиски таких частиц с помощью различных специальных детекторов [59-61].

В качестве гипотетических частиц ТМ рассматриваются сверхлегкие стерильные аксионы с массой в диапазоне $10^{-6} \div 10^{-3}$ eV. Аксионы были введены в теорию элементарных частиц для объяснения нарушения СР-инвариантности в ранней Вселенной [67,68]. Аксионы должны распадаться под действием внешнего электромагнитного поля на два одинаковых фотона [69]. С целью регистрации этого распада и подтверждения существования аксионов разрабатываются в настоящее время сверхчувствительные акционные детекторы.

Характерными частицами ГТМ служат нейтрино и антинейтрино. При этом их масса как кандидатов ГТМ должна лежать в диапазоне 10-100 eV.

Претендентами на роль ТМ являются также различные суперсимметричные частицы, которые могли образоваться в начальные моменты существования Вселенной (при ее «суперсимметрии», когда все четыре взаимодействия были объединены). Подробную информацию о всевозможных гипотетических частицах ТМ можно получить из сборников конференций по ТМ [59-61].

Ньютона Темная Материя. Наряду с разрабатываемыми моделями, опирающимися на современную (прежде всего релятивистскую физику), при анализе возможной природы частиц ТМ можно вернуться к рассмотрению классического эфира XIX века и отождествить светонесущий эфир непосредственно с ТМ. При этом эфир следует предположить телесным и применить к его описанию классическую ньютонаскую физику. Подобная модель Ньютона Темной Материи (НТМ) (Newtonian Dark Matter – NDM) в форме суббарионной газообразной среды предложена в [15-18]. Дадим элементарное описание НТМ, заостряя внимание на основных допущениях представляемой модели.

Следуя общим физическим представлениям, всякий ограниченный объем газообразной среды состоит из конечного числа частиц. В случае рассматриваемой модели темной материи это субатомные (не барионные) материальные частицы, движущиеся «почти» свободно во всех направлениях с разными скоростями. Следуя гипотезе [15-18], половина частиц наделена положительными и другая половина отрицательными одинаковыми по величине электрическими зарядами, причем попарно частицы противоположных зарядов образуют диполи, имеющие наряду с поступательными, вращательные и колебательные степени свободы. Среда таким образом является в целом квазинейтральной, однако в ней допускаются так называемые «коллективные» процессы типа локальной концентрации положительного и отрицательного электрических зарядов. Каждая частица взаимодействует с другими частицами через электромагнитное и гравитационное поле и путем упругих столкновений.

Рассмотрим случай «идеальной» газообразной среды, когда суммарный собственный объем всех частиц во много раз меньше, чем занимаемый самой газообразной средой объем. Каждая частица имеет массу m , вектор скорости \vec{v} , импульс $m\vec{v}$ и кинетическую энергию

$m\bar{u}^2/2$. Элементарный газокинетический подход, базирующийся на втором законе Ньютона, позволяет связать величину давления p в объеме V , содержащем N частиц, с их осредненным импульсом по формуле

$$pV = \frac{1}{3} Nm\bar{u}^2. \quad (4.3)$$

В соотношении (4.3) величина квадрата средней скорости рассчитывается как $\bar{u}^2 = \frac{1}{N} \sum u_i^2$. Эта величина определяет также осредненную кинетическую энергию рассматриваемого ансамбля частиц.

Введем теперь традиционным способом температуру T как функцию состояния, через которую выражается скрытое движение частиц. Связем ее с осредненной кинетической энергией по формуле

$$T = \frac{2}{3k} \frac{m\bar{u}^2}{2}. \quad (4.4)$$

Здесь $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж}^{-1} = 8,62 \cdot 10^{-5} \text{ эВК}^{-1}$ – постоянная Больцмана. Из (4.3) и (4.4) приходим к обычному уравнению состояния газообразной среды в форме (4.1)

$$pV = NkT \text{ или } \frac{p}{\rho} = \frac{k}{m} T, \quad (4.5)$$

где $\rho = Nm/V$ – плотность среды.

При определении свойств НТМ используются два основных предположения. Первое, НТМ (аналогично классическому эфиру XIX века) является носителем электромагнитных и гравитационных возмущений и, прежде всего, микроволнового реликтового излучения, имеющего в наши дни температуру 2,7 К. Естественно при этом в силу термодинамического равновесия принять это значение температуры для газообразной среды НТМ. Второе, положим равенство скорости распространения возмущений в данной среде скорости света в свободном пространстве $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$. Важным моментом при этом является также приравнивание скоростей распространения продольных и поперечных возмущений (что представляется в рамках сформулированной модели НТМ в виде суббарийонных частиц и полученных ниже точных решений достаточно естественным). При сделанных предположениях элементар-

но вычисляется масса частиц, из которых должна состоять такая сжимаемая среда.

Запишем формулу скорости распространения возмущений в газообразной адиабатической среде НТМ также как (4.2).

Из (4.2) и (4.5) получаем

$$m = k k T / c^2 \approx 6 \cdot 10^{-40} \text{ кг} = 3,4 \cdot 10^{-4} \text{ эВ}. \quad (4.6)$$

Здесь величина k принята равной 1,3 (как в случае классической модели «двуатомного» газа).

Несложно определить также ряд других характеристик частиц газообразной НТМ. Так, из (4.4) рассчитаем величину осредненной скорости движения частиц $\bar{u} \approx 4,5 \cdot 10^8 \text{ м/с}$. При заданной плотности материи в пространстве вычисляется концентрация частиц НТМ. Принимая во внимание значения массы и заряда электрона, можно рассчитать величину «ультразлементарного» заряда частиц НТМ (примерно 10^{-28} Кл).

В связи с предложенной моделью весьма интересной становится трактовка рождения электрон-позитронной пары в «вакууме» – среде НТМ. Этот процесс представляется как одновременное разрушение большого количества (примерно 10^9) диполей под действием электрического поля и концентрация их частей с зарядом одного знака в отдельные образования (под действием дополнительных сил – магнитных, газодинамических и, возможно, гравитационных). В изложенной версии рождение электрон-позитронной пары удовлетворяет законам сохранения массы и заряда. Следует также подчеркнуть, что величина рассчитанной массы этих частиц согласуется с широко дискутируемыми в настоящее время моделями чрезвычайно легких «стерильных» аксионов.

Применяемая механическая модель НТМ в форме газообразной сжимаемой среды позволяет объяснить многие физические и астрофизические явления. Ряд таких явлений подробно рассмотрен в [19-21] и частично описан в дополнении. В конце этого параграфа мы отметим только изменение скорости распространения возмущений среды (и, в частности, скорости света в свободном пространстве) с изменением температуры. В данной связи представляются интересными выполненные в конце 2000 года оценки температуры реликтового излучения в далеком прошлом, примерно 12 миллиардов лет назад [70]. Эта оценка показала, что температура микроволнового фона лежала в то время в пределах от 6 до 14 градусов Кельвина, что согласуется с современной теорией Горячего Большого Взрыва, дающей для этого момента значение температуры около 9 градусов Кельвина. При такой температуре

скорость света должна была превышать в 1,8 раза свое сегодняшнее значение (по оценкам, следующим из модели НТМ). В случае, если модель НТМ является хорошим приближением к действительности, то вышеуказанное изменение скорости света с возрастом Вселенной необходимо учитывать в астрофизических и космологических исследованиях. В частности, зависимость скорости света от температуры влияет на результаты измерений расстояний до удаленных галактик и может скорректировать выводы о наличии дополнительных сил отталкивания («репульсивных» сил) во Вселенной, которые, как в настоящее время считается, частично компенсируют гравитационное притяжение галактик на больших космологических расстояниях [71-73].

Механические модели. Сопоставим теперь рассматриваемую достаточно простую механическую модель темной материи как светонесущей среды с механической моделью Д.К. Максвелла [12]. Максвелл писал (стр. 175): «Мы вряд ли можем отказаться от вывода, что свет состоит из поперечных колебаний той же самой среды, которая является причиной электрических и магнитных явлений.» На рис. 4.2, а приведена структура указанной среды в том виде, как ее представлял Д.К. Максвелл (стр. 143). При этом в своих работах при построении теории электромагнетизма он широко использовал механические аналогии с движением несжимаемой жидкости.

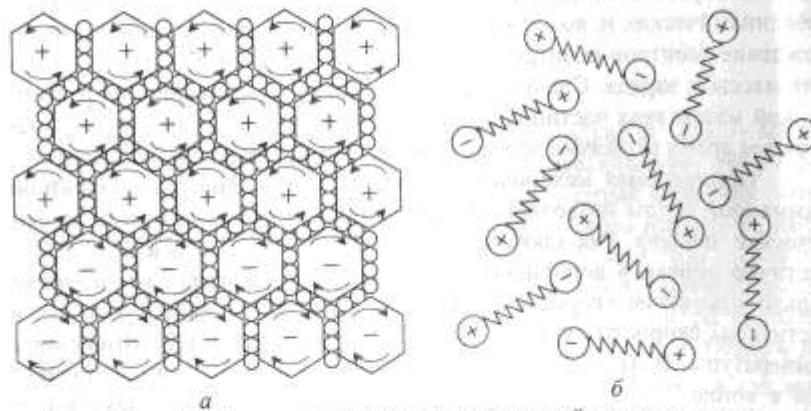


Рис. 4.2. Механические модели светонесущей среды: а – модель Д.К. Максвелла, б – модель темной материи.

На рис. 4.2, б для сравнения показана описанная в данном параграфе механическая модель светонесущей темной материи, как сжимае-

мой газообразной среды, элементы которой состоят из разноименно заряженных материальных частиц с массой $m = 6 \cdot 10^{-40}$ кг и зарядом $q = 10^{-28}$ Кл, образующих элементарные диполи, имеющие поступательные, вращательные и колебательные степени свободы. Отметим, что весьма часто достаточно простые модели позволяют строить хорошие математические теории, описывающие сложные физические явления. Уместно здесь также вспомнить простейшую модель атома Н. Бора, правильно описывающую спектр энергетических уровней атома водорода.

В заключение параграфа подчеркнем, что взаимодействие барионной и суббарионной материи может иметь не только гравитационный характер и при взаимном движении материи следует тщательно проанализировать этот вопрос (к нему мы вернемся в следующем параграфе).

§5. Движение

«Абсолютное движение есть перемещение тел из одного абсолютного его места в другое, относительное – из относительного в относительное... Вместо абсолютных мест и движений пользуются относительными; в делах житейских это не представляет неудобства, в философских необходимо отвлечение от чувства.»

Исаак Ньютон «Начала» [37]

Абсолютное движение рассматривается как перемещение тела из одного положения в другое в выбранном абсолютном трехмерном евклидовом пространстве. В качестве такого абсолютного пространства примем рекомендованную в §2 и §3 абсолютную систему декартовых координат, начало которой совмещено с начальной точкой Большого Взрыва. Принцип относительности, изложенный в следующем параграфе, позволит установить однозначное соответствие между абсолютным и относительным движением.

Аксиомы движения и принцип детерминированности Ньютона

«Axiomata sive Leges Motus.

I. Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменить это состояние.

II. Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует.»

Исаак Ньютона «Начала» [37]

Аксиомы движения были весьма четко сформулированы Ньютоном и подробно разъясняются в вводных курсах общей физики.

Принцип детерминированности Ньютона сводится к следующему. Начальное состояние системы, заданное совокупностью положений и скоростей всех ее точек, однозначно определяет все последующее движение системы. В частности, однозначно определяется ускорение

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}(t, \bar{r}, \bar{v}). \quad (5.1)$$

Уравнение вида (5.1) лежит в основе всей ньютоновской механики.

Наложим ряд ограничений на правую часть уравнения (5.1), используя для этого сформулированные в первых двух параграфах свойства пространства – времени. Однородность времени требует от функции \bar{F} зависимости только от относительного времени $\Delta t = t - t_0$, т.к. преобразование сдвига по времени (иначе, выбор начальной точки отсчета времени t_0) не должно изменить решение уравнения (5.1). Далее, фундаментальное свойство однородности пространства накладывает на функцию \bar{F} требование независимости от абсолютных координат. Инвариантность решения (5.1) относительно сдвига по пространству показывает, что функция \bar{F} может зависеть лишь от относительных координат $\Delta\bar{r} = \bar{r} - \bar{r}_0$. Фундаментальное свойство изотропии пространства, т.е. равноправие всех направлений в пространстве, налагает на \bar{F} требование

$$\bar{F}(t, G\bar{r}, G\bar{v}) = G\bar{F}(t, \bar{r}, \bar{v}), \quad (5.2)$$

где G – ортогональное преобразование пространственных координат и скоростей.

Еще одно требование на правую часть уравнения (5.1) следует из свойств инвариантности относительно перехода к равномерно движущейся системе координат. Здесь работает принцип относительности Галилея, который будет рассмотрен в следующем параграфе, и сформулированная на его основе первая аксиома движения Ньютона. Из этого принципа вытекает требование зависимости функции \bar{F} только от от-

носительных скоростей $\Delta\bar{v} = \bar{v} - \bar{v}_0$. В силу сказанного уравнение (5.1) должно быть записано в форме

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{f}(\Delta t, \Delta\bar{r}, \Delta\bar{v}) \quad (5.3)$$

при удовлетворении функцией \bar{f} условию (5.2)

$$\bar{f}(\Delta t, G\Delta\bar{r}, G\Delta\bar{v}) = G\bar{f}(\Delta t, \Delta\bar{r}, \Delta\bar{v}). \quad (5.4)$$

Элементарными примерами уравнений вида (5.3) служат уравнения движения тела массы m под действием постоянной силы \bar{f}

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{f}, \quad (5.5)$$

уравнение движения идеальной (невязкой) жидкости (газа)

$$\rho \frac{d\bar{v}}{dt} = -\text{grad } p, \quad (5.6)$$

где ρ – плотность и p – давление среды и др.

В дальнейшем при построении теоретических моделей динамики диспергирующей среды мы всегда будем удовлетворять перечисленным требованиям, следующим из фундаментальных свойств пространства – времени и принципа относительности Галилея.

Субстанциональная (полная) производная. Описание движения сплошной легкоподвижной среды будем проводить с помощью «полевых» функций в переменных Эйлера. При этом изучается изменение различных параметров движения (функций) в фиксированных точках пространства (поля) с течением времени. Параметры среды определяются как функции четырех аргументов t, x, y, z , называемых переменными Эйлера. С точки зрения Эйлера, объектами изучения являются векторные $(\bar{v}, \bar{w}, \bar{f})$ и скалярные (ρ, p) поля, характеризующие движение среды.

Ускорение фиксированной частицы легкоподвижной среды в переменных Эйлера $\bar{w} = \bar{w}(t, x, y, z)$ определяется как дифференцирование сложной функции (см., например, [1-7, 92])

$$\bar{w} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{\partial\bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial\bar{v}}{\partial x} u + \frac{\partial\bar{v}}{\partial y} v + \frac{\partial\bar{v}}{\partial z} w = \frac{\partial\bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla)\bar{v}, \quad (5.7)$$

где $\bar{v} \cdot \nabla$ – скалярное произведение вектора скорости

$$\bar{v} = u \cdot \bar{i} + v \cdot \bar{j} + w \cdot \bar{k}$$

и оператора градиента

$$\nabla = \text{grad} = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k}.$$

Первое слагаемое в (5.7) определяет локальное ускорение в данной точке поля, а второе слагаемое характеризует вторую часть ускорения, обусловленную изменением скорости вдоль пространственных координат в фиксированный момент времени (конвективное ускорение). Оператор

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) \quad (5.8)$$

называется полной (субстанциональной) производной, т.к. относится к определенной частице среды.

Чрезвычайно важно для дальнейшего изложения подчеркнуть, что второе квазилинейное слагаемое обеспечивает инвариантность субстанциональной производной относительно преобразования Галилея (§6).

Уравнение движения идеального газа (5.6) с учетом (5.8) имеет вид

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p. \quad (5.9)$$

В случае линеаризации уравнений типа (5.9) квазилинейным конвективным ускорением пренебрегается и при этом теряется свойство инвариантности уравнений относительно преобразования Галилея.

О взаимодействии барионной и суббарионной материи. Суббарионная темная материя рассматривается в рамках настоящей монографии в ньютоновском приближении газообразной среды, состоящей из частиц массой $m = 6 \cdot 10^{-40}$ кг (см. §4). Оценка средней плотности НТМ в гало галактик и их скоплений дает величину примерно $10^{-18} + 10^{-20}$ г/см³, плотность НТМ в межгалактическом пространстве составляет порядка $10^{-26} + 10^{-29}$ г/см³. В рассматриваемом приближении

материальная НТМ распределена всюду и непосредственно дает существенный вклад в величину действующих гравитационных полей.

Барионные частицы представляют собой в нашем приближении предельно сконцентрированную в локальных весьма малых по размеру зонах пространства (порядка 10^{-15} см) НТМ в форме изолированных частицеподобных солитонов (§17 и §27).

Барионные частицы формируют привычную нам материю в газообразном, жидким и твердом состояниях с хорошо известной нам плотностью вещества, суббарионные частицы заполняют свободное пространство («пустоту») и межмолекулярное пространство в барионной материи при существенно более низких значениях плотности (на десятки порядков).

При движении друг относительно друга барионной и суббарионной материи должно наблюдаться непосредственно взаимное влияние двух указанных субстанций (подчеркнем аналогию с движением твердых тел в газообразной или жидкой среде). Взаимодействие через электромагнитные или гравитационные поля нами подробно будут рассмотрены ниже. Здесь же мы только укажем на возможные эффекты «вязкого» взаимодействия при обтекании барионных тел суббарионной газообразной материи.

Весьма интересными представляются при этом дополнительные эффекты при наличии вращательного движения молекул газообразной барионной среды в суббарионной НТМ. Как одну из гипотез в этом случае можно высказать частичное увлечение во вращательное движение НТМ и таким путем передачу дополнительных возмущений от молекулы к молекуле в барионной газообразной среде.

§6. Относительность

«Принцип относительности, согласно которому законы физических явлений должны быть одинаковыми для неподвижного наблюдателя и для наблюдателя, совершающего равномерное поступательное движение, так что мы не имеем и не можем иметь никакого способа определять, находимся ли мы в подобном движении или нет.»

А. Планка «Настоящее и будущее математической физики» [74]

«Согласно этому принципу все законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.»

Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц «Теория поля» [46]

При знакомстве с принципом относительности подкупает его изящество и кажущаяся простота. Однако важно указать на одно фундаментальное отличие в его трактовке. Поясним данный аспект вопроса, переформулируя принцип относительности в виде:

Все законы природы одинаковы в рамках любой инерциальной системы отсчета.

«В рамках ...системы» означает одинаковость законов природы в пределах любой выбранной инерциальной системы, когда в рамках системы рассматривается «окружающее» пространство, заполненное либо воздухом, либо излучением и т.п. Если в рамки системы не включать окружающее пространство, то относительно этого «внешнего» пространства можно вполне определить «находимся ли мы в....движении или нет». Хорошим примером здесь может служить обнаруженное в 1977 году движение Земли, Солнечной системы и нашей галактики Млечный Путь относительно фонового микроволнового излучения [64, 75].

В связи с указанным аспектом разная трактовка принципа относительности, а именно, имеем ли мы какой либо способ определять, находимся ли мы в «движении или нет», приводит к разным физическим теориям: либо к классической механике Ньютона, либо к релятивистской механике Эйнштейна. Поясним подробнее данный вопрос, рассмотрев более детально классический принцип относительности Галилея, допускающий движение материи со сверхсветовыми скоростями, и принцип относительности Эйнштейна, запрещающий движение материи со скоростями, равными или превышающими скорость света в пустоте.

Принцип относительности Галилея

«Уединитесь с кем-либо из друзей в просторное помещение под палубой какого-нибудь корабля... Пока корабль стоит неподвижно, наблюдайте прилежно, как мелкие летающие животные с одной и той же скоростью движутся во все стороны помещения;...все падающие капли попадут в поставленный сосуд (и т.п.)...Заставьте теперь корабль двигаться с любой скоростью и тогда (если движение будет равномерным и без качки в ту или другую сторону) во всех названных явлениях вы не обнаружите ни ма-

лейшего изменения и ни по одному из них не сможете установить, движется ли корабль или стоит неподвижно... И причина согласованности всех этих явлений заключается в том, что движение корабля общее всем находившимся на нем предметам, так же, как и воздуху; поэтому – то я и сказал, что вы должны находиться под палубой, так как если бы вы были на ней, т.е. на открытом воздухе, не следующем за бегом корабля, то должны были бы видеть более или менее заметные различия в некоторых из названных явлений: дым, несомненно, стал отставать вместе с воздухом...»

Галилео Галилей «О двух системах мира, птолемеевой и коперниковой» [58]

Нами приведена подробная выдержка из работы Галилея, наглядно во всех основных аспектах излагающая суть принципа относительности. Вернемся теперь к более современной формулировке данного принципа. С этой целью определим понятие инерциальной системы координат.

Инерциальными системами координат называют системы отсчета, в которых свободное движение тела и материальной среды происходит равномерно и прямолинейно с постоянной скоростью. Под свободным движением здесь понимается движение материи при отсутствии силовых воздействий (внешних или внутренних, как, например, собственного давления, вязкости и т.п.). Принцип Галилея гласит: все законы природы во все моменты времени одинаковы в рамках любой инерциальной системы координат. При этом все системы координат, движущиеся относительно инерциальной равномерно и прямолинейно, инерциальны. Из приведенной формулировки следует, что, выполняя опыты в рамках инерциальной системы координат (под палубой корабля или внутри движущегося вагона), нельзя обнаружить состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения этой системы. Однако стоит выйти на палубу корабля или открытую платформу, как мы увидим, что «дым, несомненно, стал отставать вместе с воздухом...».

В связи с принципом Галилея остановимся на важном вопросе о движении Земли в космическом пространстве (относительно «эфира»). Известные опыты Майкельсона – Морли, Кеннеди – Торндайна и ряд других аналогичных опытов по определению движения Земли относительно светонесущего «эфира» (см., например, [49-54]) были выполнены на поверхности Земли («под палубой корабля») и тем самым под-

твердили принцип Галилея. В то же время серия аккуратных опытов по определению крупномасштабной дипольной анизотропии реликтового микроволнового излучения, выполненных в середине 70-х годов прошлого столетия, обнаружили движение Земли относительно реликтового излучения [75]. В настоящее время нам хорошо известны скорости движения Земли, Солнечной системы и нашей галактики Млечный путь в окружающем нас космическом пространстве.

Опираясь на принцип относительности Галилея, Ньютона формулирует закон инерции как первый закон движения [37]. В монографии [76] С.И. Вавилов отметил: «Закон инерции выражен в явно относительной форме. Состояние покоя или прямолинейного равномерного движения равноправны...».

В настоящей монографии предполагается справедливость принципа относительности Галилея для всех физических явлений в природе.

Принцип относительности Эйнштейна

«Опыт дал множество фактов, которые допускают следующее обобщение: невозможно обнаружить абсолютное движение материи, или, точнее, относительное движение весомой материи и эфира. Все, что можно сделать, – это выявить движение весомой материи относительно весомой материи.»

А. Пуанкаре «К теории Лармора» [74] «Объединение принципа относительности с конечностью скорости распространения взаимодействий называется принципом относительности Эйнштейна (он был сформулирован А. Эйнштейном в 1905 г.) в отличие от принципа относительности Галилея, исходящего из бесконечной скорости распространения взаимодействий.»

Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц «Теория поля» [46]

Принцип относительности Эйнштейна гармонично объединяет два основополагающих постулата Специальной Теории Относительности (СТО). Первый постулат СТО называют иногда также принципом относительности и формулируют часто в виде, весьма близком к приведенной выше цитате А. Пуанкаре, а именно (см., например, [51], стр. 26): «Невозможно обнаружить равномерное поступательное движение системы в свободном пространстве или в какой-либо гипотетической эфирной среде, которая могла бы это пространство заполнять». В качестве подтверждения справедливости этого постулата приводят обычно опыты Майкельсона – Морли, Кеннеди – Торндайка и др. [46-49]. Од-

нако, как уже было отмечено, результаты опытов по детектированию дипольной анизотропии реликтового излучения [75] противоречат этому постулату.

Второй постулат СТО также выводится из расширенного на область вне рамок системы принципа относительности [46] и гласит, что скорость распространения взаимодействий (скорость распространения света в пустоте) одинакова во всех инерциальных системах отсчета. При этом скорость света в пустоте есть максимальная скорость распространения взаимодействий, а ее наличие означает, что в природе вообще невозможно движение материи со скоростью, равной или превышающей c . Создание СТО привело к полному отрицанию телесного эфира, как носителя электромагнитных возмущений (взаимодействий).

Касаясь экспериментальных подтверждений второго постулата СТО, следует указать, что к настоящему времени опубликовано большое число опытных данных, в которых зарегистрированная скорость движения изолированных импульсов превышает скорость света в пустоте [77-82]. В то же время традиционная («докритическая») СТО приводит для гипотетических сверхсветовых частиц – тахионов к минимуму значению их массы [83-84].

О принципах ковариантности и эквивалентности

«Предположение, заключающееся в том, что законы физики можно выражать в форме, не зависящей от выбора системы координат, называется принципом ковариантности».

Толмен Р. «Относительность, термодинамика и космология» [51]

«Неинерциальная система отсчета эквивалентна некоторому гравитационному полю.»

Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. «Теория поля» [46]

Принцип ковариантности, выражающий идею относительности всякого движения, лежит в основе Общей Теории Относительности (ОТО), развитой А. Эйнштейном в 1906-1915 г.г. Описание физических процессов в ОТО осуществляется в искривленном пространстве – времени с изменяющейся метрикой. Кривизна пространства – времени позволяет построить интересную модель гравитационного взаимодействия, основанную на аналогии между результатами, получаемыми в гравитационном поле с использованием равномерно движущейся системы отсчета, и результатами, получаемыми в отсутствие гравитационного поля, но в системе отсчета, движущейся ускоренно. Эта аналогия при-

нимается в качестве второго постулата ОТО и носит название принципа эквивалентности.

ОТО реализует полностью идею относительности любых видов движения. Ковариантная форма записи уравнений позволяет использовать компактный аппарат тензорного анализа при описании геометрии пространства – времени и моделировании физических процессов. В качестве примера приведем здесь ковариантную запись интервала в форме общего тензорного соотношения

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (6.1)$$

через компоненты метрического тензора $g_{\mu\nu}$. В (6.1) выполняется правило суммирования Эйнштейна по повторяющим индексам $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$. Приведенные ранее в §2 и 3 выражения для интервала (2.1), (2.2), (3.21) – (3.24) есть частные случаи общего выражения (6.1).

Принятый в ОТО принцип ковариантности заставляет задуматься о вопросе, может ли ковариантность привести к ограничениям на возможность моделирования реальных физических процессов. В случаях, если развиваемая теория опирается на соотношения типа (3.21) – (3.24), то на данный вопрос следует дать утвердительный ответ. В частности, использование соотношений типа (3.21) – (3.24) ограничивает диапазон скоростей движения материи только досветовыми скоростями. Отмеченное обстоятельство необходимо иметь в виду при применении ОТО.

В заключение краткого раздела, касающегося ОТО, подчеркнем, что многочисленные опытные данные последних лет указывают на отсутствие кривизны пространства нашей Метагалактики [43,44] (Метагалактика «выбрала» геометрию Евклида).

§7. Инвариантность

«Инвариантность: симметрия некоторого объекта относительно преобразований».

У. Берке «Пространство – время, геометрия, космология» [49]

Фундаментальные свойства пространства, времени и процесса движения выражаются через инвариантность математических моделей относительно преобразований переменных. В настоящем параграфе рассматриваются некоторые преобразования, весьма важные в плане проникновения в суть физических явлений.

Ниже будет рассмотрен вопрос инвариантности пространственного и «гиперболического» интервала для случая двух переменных. Изотропия пространства требует от моделей физических явлений инвариантности относительно преобразования вращения. При этом пространственный интервал (2.1) (в двумерном случае (3.4)) не должен изменяться. Физическое время имеет принципиальное отличие от физического пространства. Время и пространство в ньютоновском приближении абсолютны и независимы. Однако в современной релятивистской физике время и пространство объединяются воедино с помощью инвариантности «гиперболического» интервала относительно преобразования вращения. Этот вопрос наглядно продемонстрирован на элементарном алгебраическом уровне в начале данного параграфа.

Далее будет изложен вопрос инвариантности относительно группы преобразований Галилея, которая имеет определяющее значение для ньютоновской механики. Другая рассмотренная группа преобразований доминирует в релятивистской физике и носит название преобразований Лоренца. Эта группа преобразований, как и вся релятивистская физика, опирается на инвариантность гиперболического интервала, в силу чего волновое уравнение Даламбера играет решающую роль в современной физике.

Инвариантность пространственного и «гиперболического» интервала. Остановимся на вопросе инвариантности интервала на плоскости комплексных и гиперболических переменных. В качестве неизменных интервалов возьмем соответственно модули комплексного и гиперболического числа, записанные в экспоненциальной форме. Для рассмотренных в §3 двух вариантов записи комплексных чисел (3.5) и (3.11) имеем

$$z = pe^{i\phi}, \quad p = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (7.1)$$

Аргумент ϕ при этом отсчитывается либо от оси абсцисс против часовой стрелки ($\operatorname{tg} \phi = y/x$), либо от оси ординат по часовой стрелке ($\operatorname{tg} \phi = x/y$). Умножая комплексное число на $e^{-i\phi}$, получаем пространственный интервал

$$p = ze^{-i\phi}. \quad (7.2)$$

Геометрическое место точек всех комплексных чисел с постоянным (инвариантным) интервалом $p = \text{const}$ представляет собой окружность с центром в начале координат. На рис. 7.1 жирной кривой показана

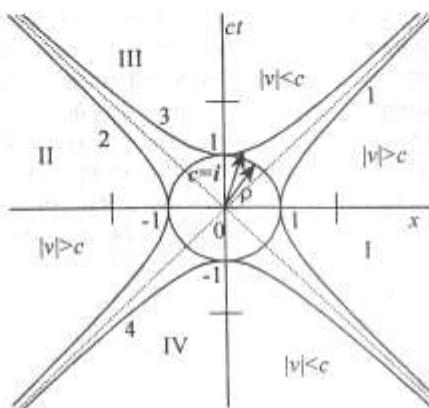


Рис. 7.1. Инвариантные пространственный и гиперболический интервалы.

такая окружность с радиусом $\rho = 1$. Из (7.2) выписываются известные формулы преобразования вращения на плоскости. Новые переменные X и Y выражаются через старые x и y при повороте на угол ϕ по формулам: для комплексных чисел (3.5)

$$\begin{aligned} X &= x \cos \phi + y \sin \phi, \\ Y &= y \cos \phi - x \sin \phi, \end{aligned} \quad (7.3)$$

для комплексных чисел (3.11)

$$\begin{aligned} X &= x \cos \phi - y \sin \phi, \\ Y &= y \cos \phi + x \sin \phi \end{aligned} \quad (7.4)$$

(см. рис. 7.2, а и б соответственно).

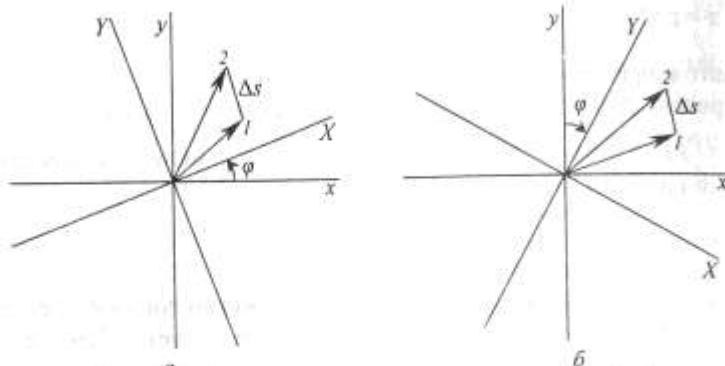


Рис. 7.2. Преобразования вращения на плоскости (x,y) .

С помощью формул (7.3) и (7.4) легко убедиться, что эти преобразования вращения сохраняют постоянным квадрат интервала

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 = (X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Важно подчеркнуть, что преобразования вращения (7.3) или (7.4) справедливы (как и теорема Пифагора) для случая абсолютных и независимых координат x и y изотропного пространства (плоскости).

Рассмотрим теперь аналогичные преобразования вращения на плоскости гиперболических переменных, т.е. на плоскости зависимых x и t . Для гиперболических чисел при одинаковой экспоненциальной форме записи

$$z = \rho e^{i\phi} \quad (7.5)$$

имеем различные интервалы (модули) и аргументы: в случае гиперболических чисел (3.12)

$$\rho = \sqrt{x^2 - c^2 t^2}, \quad \phi = \ln \sqrt{\frac{x+ct}{x-ct}}, \quad (7.6)$$

в случае гиперболических чисел (3.13)

$$\rho = \sqrt{c^2 t^2 - x^2}, \quad \phi = \ln \sqrt{\frac{ct+x}{ct-x}}. \quad (7.7)$$

Умножая (7.5) на $e^{-i\phi}$, получаем выражение для гиперболического интервала

$$\rho = z e^{-i\phi}. \quad (7.8)$$

Геометрическое место точек гиперболических чисел с одинаковым интервалом $\rho = 1$, определяемых формулами (7.6) и (7.7), показаны также на рис. 7.1. Они представляют собой гиперболы. Для (7.6) это две гиперболы правого и левого квадрантов, для (7.7) это две гиперболы верхнего и нижнего квадрантов плоскости гиперболических чисел. Соответственно аргумент ϕ отсчитывается либо от оси абсцисс, либо от оси ординат (против часовой стрелки или по часовой стрелке).

С помощью (7.8) выписываются также формулы преобразований вращения на плоскости гиперболических чисел. Новые переменные X и Y выражаются через старые x и y по формулам:

$$\begin{aligned} X &= x \operatorname{ch} \phi - ct \operatorname{sh} \phi, \\ cT &= ct \operatorname{ch} \phi - x \operatorname{sh} \phi, \end{aligned} \quad (7.9)$$

где в случае гиперболических чисел (3.12) и (3.13)

$$\operatorname{th} \phi = c/v \quad \text{и} \quad \operatorname{th} \phi = v/c \quad (7.10)$$

соответственно.

На рис. 7.3 а и б представлены эти преобразования вращения.

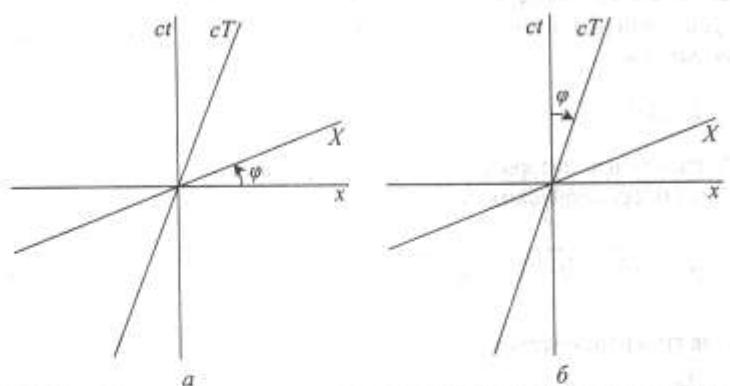


Рис. 7.3. Преобразования вращения на плоскости гиперболических переменных.

Подчеркнем, что в рамках релятивистских теорий постулат о невозможности превышения величины скорости c накладывает жесткое ограничение $v < c$ и при этом рассматривается только половина возможных преобразований вращения, только в плоскости гиперболических чисел (3.13).

Группа преобразований Галилея. Математические модели ньютоновской механики инвариантны относительно группы преобразований Галилея (см., например, [7, 42, 86]). Эта группа включает:

а) сдвиг по времени, выражающий свойство однородности времени и характеризующий тот факт, что законы природы не зависят от выбора начальной точки отсчета времени. Здесь уравнения математической модели инвариантны относительно перехода к новым независимым переменным

$$T = t + \Delta t, \quad X = x, \quad Y = y, \quad Z = z, \quad (7.11)$$

где Δt – произвольное;

б) сдвиг по пространству, выражающий свойство однородности пространства и независимость явлений природы от выбора начала пространственных координат,

$$T = t, \quad X = x + \Delta x, \quad Y = y + \Delta y, \quad Z = z + \Delta z, \quad (7.12)$$

где $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ – произвольные;

в) вращение в пространстве, выражающее свойство изотропности пространства. Приведем формулы трех преобразований вращения

$$X + iY = (x + iy)e^{i\alpha}, \quad U + iV = (u + iv)e^{i\alpha}, \quad (7.13)$$

$$Y + iZ = (y + iz)e^{i\beta}, \quad V + iW = (v + iw)e^{i\beta}, \quad (7.14)$$

$$Z + iX = (z + ix)e^{i\gamma}, \quad W + iU = (w + iw)e^{i\gamma}, \quad (7.15)$$

где i – мнимая единица, α, β, γ – произвольные углы поворота относительно осей x, y, z .

г) галилеев перенос, представляющий переход в другую инерциальную систему отсчета и реализующий принцип относительности Галилея

$$X = x + at, \quad U = u + a, \quad (7.16)$$

$$Y = y + bt, \quad V = v + b, \quad (7.17)$$

$$Z = z + ct, \quad W = w + c, \quad (7.18)$$

где a, b и c – произвольные постоянные движения новой системы координат относительно старой по осям x, y и z .

В преобразованиях (7.11) – (7.18) заглавными буквами обозначены переменные в новой системе координат и малыми буквами – в старой системе. Не участвующие в преобразованиях (7.11) – (7.18) переменные не изменяются.

Все математические модели динамики диспергирующей среды, рассматриваемые ниже в настоящей монографии, инвариантны относительно десятипараметрической группы преобразований Галилея а) – г). При построении математических моделей мы специально будем удовлетворять соответствующим условиям и подчеркивать возникающие при этом особенности. Здесь в качестве характерного примера отметим

принципиальное свойство субстанциональной производной и оператора (5.8), состоящее в их инвариантности относительно группы преобразований Галилея (важно при этом, что квазилинейное слагаемое, выражающее конвективное ускорение и содержащее оператор $\bar{v} \cdot \nabla$, обеспечивает инвариантность относительно галилеева переноса). Линеаризация уравнений приводит к нарушению свойств инвариантности математической модели. В силу сказанного линейные дифференциальные модели также не инвариантны галилееву преобразованию.

Преобразования Лоренца

«Скорости материальных тел, превышающие скорость света, невозможны, что вытекает из появления радикала $\sqrt{1 - v^2}$ в формулах частного преобразования Лоренца.»

A. Эйнштейн «Сущность теории относительности» [87], стр. 31)

Впервые линейные преобразования пространственно-временных координат, носящие имя Лоренца, были получены в 1887 г. В. Фогтом [88], как преобразования, оставляющие инвариантным волновое уравнение Даламбера. В 1900 г. Дж. Лармором [89] было показано, что уравнения электродинамики Максвелла в свободном пространстве также инвариантны относительно этих преобразований. Позже, в 1904 г., они были выписаны Г. Лоренцем [90] и по предложению А. Пуанкаре [91] стали именоваться преобразованиями Лоренца. Установление свойств инвариантности уравнений Максвелла относительно преобразований Лоренца было решающим шагом на пути к созданию СТО [87] и к введению единой (зависимой) геометрии пространства – времени (псевдоевклидова пространства) Г. Минковским [45]. Опишем кратко преобразования Лоренца.

Волновое уравнение Даламбера

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad \square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta, \quad (7.19)$$

Δ – оператор Лапласа, и уравнения электродинамики Максвелла (см. далее §22) инвариантны относительно следующих линейных пространственно-временных преобразований Лоренца, которые мы выпишем в традиционном виде [46]

$$T = \gamma(t - vx/c^2), \quad X = \gamma(x-vt), \quad Y = y, \quad Z = z, \quad (7.20)$$

где v – скорость движения новой системы координат относительно исходной в направлении оси x (или X), c – скорость света (причем ее часто полагают равной единице), $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ – фактор Лоренца.

Преобразования Лоренца (7.20) оставляют также инвариантным интервал (3.21), и один из способов вывода этих преобразований основан на данном свойстве (см., например, [48]).

§8. Взаимодействия

«Действию есть всегда равное и противоположное противодействие, иначе, взаимодействия двух тел друг на друга между собою равны и направлены в противоположные стороны.»

Исаак Ньютон «Начала» [37]

Вопросы взаимодействия в газообразной среде будем рассматривать в «полевом» приближении механики сплошных сред. Изменение по времени состояния газообразной среды при наличии взаимодействий изучается в фиксированных точках трехмерного евклидового пространства. При этом векторные и скалярные компоненты изучаемого процесса являются функциями пространственных координат и времени – четырех аргументов x, y, z, t . Основное внимание будет уделено трем типам взаимодействий: гидродинамическому, электромагнитному и гравитационному. Отмечены некоторые моменты, связывающие воедино моделирование «далекодействующих» и «близкодействующих» силовых полей.

Скалярные и векторные поля. Скалярная величина характеризуется только одним числовым значением в каждой рассматриваемой точке пространства. Примерами скалярных величин служат давление, плотность, температура, энергия, потенциал и т.п. При графическом представлении поля скалярных величин удобно характеризовать линиями (в двумерном случае) или поверхностями (в трехмерном случае) уровня, т.е. постоянных значений. Скалярные величины не имеют выделенного направления в пространстве. Однако с помощью операции градиента (grad) можно ввести связанное с данным скалярным полем соответствующее векторное поле, которое будет характеризовать быстроту изменения скалярного поля по направлениям в пространстве [92]. Так, для скалярного поля $\phi(x, y, z)$ градиентом называется вектор

$$\operatorname{grad} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{k}.$$

Другим распространенным обозначением градиента является $\nabla \phi$, через оператор Гамильтона

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}.$$

Силовое взаимодействие, определяемое соответствующими скалярными полями, выражается обычно через операцию градиента (например, $\operatorname{grad} \phi$, где ϕ – значение потенциала, $\operatorname{grad} p$, где p – давление).

Векторные поля для каждого рассматриваемого момента времени характеризуются своей величиной и направлением в пространстве. В трехмерном случае одно векторное поле, например для скорости $\bar{v}(x, y, z)$, определяется заданием трех скалярных полей, тремя своими компонентами $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ по соответствующим координатным осям x , y , z

$$\bar{v} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}.$$

Векторные поля графически удобно представлять линиями или поверхностями тока, определяемыми соотношениями

$$\frac{dx}{u(x, y, z)} = \frac{dy}{v(x, y, z)} = \frac{dz}{w(x, y, z)}. \quad (8.1)$$

Формула (8.1) показывает, что касательная к линии (поверхности) тока в любой точке совпадает с направлением скорости. Величина скорости является важной характеристикой взаимодействия материальных точек в гидродинамике.

Взаимодействия, определяемые силовыми полями (электромагнитным, гравитационным и т.п.), представляются подобно полю скорости векторными полями. При этом вместо линий тока вводятся в рассмотрение силовые линии или поверхности, определяемые аналогично соотношению (8.1).

Математическое описание векторных полей в гидродинамике восходит к классическим работам Эйлера, в частности, к работе «Начала движения жидкостей» [93]. Векторные силовые поля в теории электромагнетизма рассматривались, начиная с работ Фарадея [94] и Мак-

клетта [12]. Векторные гравитационные поля, рассматриваемые ниже, опираются на теорию гравитации Ньютона [37].

В настоящем параграфе описаны известные подходы к полевому моделированию взаимодействий через скалярные и векторные поля гидродинамического, электродинамического и гравитационного типов. Некоторое обобщение этих подходов с единых позиций будет рассмотрено в дополнении.

Гидродинамическое взаимодействие. Начнем с гидродинамического взаимодействия, описывающегося одним векторным полем скорости $\bar{v}(x, y, z)$. Для этого поля в случае несжимаемой жидкости (без источников и стоков) Эйлером [93] было выведено уравнение неразрывности (непрерывности) в форме

$$\operatorname{div} \bar{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (8.2)$$

Им в той же работе выписано уравнение для потенциала скорости ϕ ($\bar{v} = \operatorname{grad} \phi$)

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \quad (8.3)$$

Уравнение (8.3) принято называть уравнением Лапласа, который вывел его независимо в связи с другими задачами (примерно на полвека позже). Из уравнения (8.3) в области интегрирования при задании граничных условий на ее границе определяется величина потенциала «взаимодействия» ϕ и скорости \bar{v} (его градиента). Как уже отмечалось ранее, решение уравнения Лапласа (8.3) приводит к закону обратных квадратов в сферически симметричном случае.

Формулировка задачи в виде уравнения (8.3) эквивалентна формулировке, вводящей дополнительно к оператору дивергенции (div) оператор ротора (rot), а именно

$$\operatorname{div} \bar{v} = 0, \quad \operatorname{rot} \bar{v} = 0, \quad (8.4)$$

или с использованием оператора ∇

$$\nabla \cdot \bar{v} = 0, \quad \nabla \times \bar{v} = 0,$$

где точкой обозначено скалярное, а крестиком векторное произведение. Из (8.4) для компонент скорости $\bar{v} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$ легко следуют соотношения вида (8.3)

$$\Delta u = 0, \Delta v = 0, \Delta w = 0. \quad (8.5)$$

В двумерном случае уравнения (8.4) имеют форму условий Коши – Римана (аналитичности функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ от комплексного аргумента $z = x + iy$). Функции u и v называют сопряженными функциями. По аналогии назовем функции u, v, w , удовлетворяющие уравнениям (8.4), сопряженными эллиптическими функциями в трехмерном случае, а сами уравнения (8.4) условиями Коши – Римана (для трехмерного случая).

Уравнения эллиптического типа (8.3) – (8.5) описывают движение идеальной (невязкой) несжимаемой жидкости. Это простейший случай гидродинамического взаимодействия «эллиптического типа», определяемый только одним векторным полем.

Рассмотрим теперь случай гидродинамического взаимодействия «гиперболического» типа, определяемый наряду с векторным полем скорости $\bar{v}(x, y, z, t)$ еще скалярным полем давления $p(x, y, z, t)$, приводящим к силовому воздействию $\bar{f} = \text{grad } p$. Для идеальной жидкости имеем уравнения движения Эйлера

$$\rho \frac{d\bar{v}}{dt} = -\text{grad } p. \quad (8.6)$$

К трем скалярным уравнениям (8.6) присоединим еще полученное Эйлером уравнение неразрывности для случая сжимаемого газа

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{v}) = 0, \quad (8.7)$$

Линеаризация (8.6) и (8.7) приводит к уравнениям акустики вида

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + c \text{ div } \bar{v} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + c \text{ grad } \bar{p} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8.8)$$

где $\bar{p} = p/\rho c$, ρ – постоянная плотность, c – постоянная характерная скорость распространения продольных возмущений (скорость звука). Система (8.8) является замкнутой. Из системы уравнений гиперболического типа (8.8) следует, что возмущения скорости и давления удовлетворяют волновому уравнению

$$\square f = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \Delta f = 0, \quad (8.9)$$

где в качестве f выступает любая из величин \bar{v} и p (а также величина потенциала скорости). Система (8.8) представляет собой характерный пример линейного взаимодействия гиперболического типа, определяемый одним векторным и одним скалярным полем. Назовем их сопряженными гиперболическими векторным и скалярным полями.

В настоящем пункте нами рассмотрено два линейных гидродинамических взаимодействия эллиптического и гиперболического типов. Для взаимодействия эллиптического типа возмущения параметров распространяются с бесконечной скоростью (реализуется так называемое дальнодействие), для взаимодействия гиперболического типа распространение продольных возмущений происходит от точки к точке с характерной постоянной скоростью звука c (реализуется близкодействие). Здесь легко проследить переход от дальнодействия к близкодействию при использовании вместо (8.3) уравнения (8.7) и его линеаризованного аналога.

Электромагнитное взаимодействие. Рассмотрим динамику электромагнитных взаимодействий в свободном пространстве при отсутствии сосредоточенных зарядов и токов. Линейную систему уравнений электродинамики Максвелла запишем в классическом виде [46–48]

$$\text{div } \bar{E} = 0, \text{ div } \bar{H} = 0, \quad (8.10)$$

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} - c \cdot \text{rot } \bar{H} = 0, \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} + c \cdot \text{rot } \bar{E} = 0, \quad (8.11)$$

где \bar{E} и \bar{H} – векторы напряженности электрического и магнитного полей, c – скорость света.

Первая пара уравнений Максвелла (8.10) представляет собой условие непрерывности силовых линий электрического и магнитного поля. При этом изменение «интенсивности силы» соответствует (пользуясь терминологией Максвелла) скорости «воображаемого потока (несжимаемой) жидкости в трубке». Вторая пара уравнений Максвелла (8.11) сводится к волновым уравнениям Даламбера (8.9) для любой из определяемых функций.

Представим векторные поля \bar{E} и \bar{H} в виде суммы потенциальной (\bar{E}_p и \bar{H}_p) и соленоидальной (\bar{E}_s и \bar{H}_s) составляющих векторов

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \bar{E}_p + \bar{E}_s = \operatorname{grad} \phi + \operatorname{rot} \bar{A} \\ \bar{H} &= \bar{H}_p + \bar{H}_s = \operatorname{grad} \psi + \operatorname{rot} \bar{B},\end{aligned}\tag{8.12}$$

где ϕ, ψ и \bar{A}, \bar{B} скалярные и векторные потенциалы электрического и магнитного полей. Не ограничивая общности, можно положить [92]

$$\operatorname{div} \bar{A} = 0, \operatorname{div} \bar{B} = 0.$$

Тогда из (8.10) - (8.12) имеем

$$\Delta \phi = 0, \Delta \psi = 0, \square \bar{A} = 0, \square \bar{B} = 0.\tag{8.13}$$

При произвольном изменении граничных условий распространение взаимодействий в рассматриваемой области пространства происходит в соответствии с (8.13) таким образом, что скалярные потенциалы электромагнитного поля удовлетворяют уравнениям Лапласа, а векторные потенциалы – уравнениям Даламбера. Иначе говоря, продольные возмущения (при их наличии) в рассмотренной модели распространяются с бесконечной скоростью (для них имеет место дальнодействие, в связи с этим они отсутствуют), а поперечные возмущения с конечной скоростью c (для них имеет место близкодействие).

Наличие темной материи (в свободном пространстве и в других местах) может потребовать, в принципе, некоторой коррекции уравнений электродинамики.

Пример взаимодействия с сопряженными полями. В настоящем пункте для двух взаимосвязанных векторных полей \bar{V} и \bar{W} и двух скалярных полей p и q представлена система линейных уравнений, главной особенностью которой является описание процесса распространения всех возмущений (продольных и поперечных) с одинаковой характерной скоростью c . Такая система уравнений может быть записана в форме

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} - c \operatorname{rot} \bar{W} + c \operatorname{grad} p &= 0, \\ \frac{\partial \bar{W}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \bar{V} + c \operatorname{grad} q &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + c \operatorname{div} \bar{V} &= 0, \\ \frac{\partial q}{\partial t} + c \operatorname{div} \bar{W} &= 0.\end{aligned}\tag{8.14}$$

Приведенная система уравнений является замкнутой (изменение восьми скалярных величин описывается восемью скалярными уравнениями). Эта система при $\bar{W} = 0$ и $q = 0$ переходит в систему уравнений акустики, а при $p = 0$ и $q = 0$ в систему уравнений электродинамики. Векторные поля \bar{V} и \bar{W} , удовлетворяющие системе уравнений (8.14), назовем сопряженными гиперболическими векторными полями.

Покажем, что система уравнений (8.14) описывает распространение всех возмущений искомых параметров с одинаковой скоростью c . Продифференцировав по времени первые два уравнения системы (8.14), придем к соотношениям (с учетом исходных уравнений первого порядка)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial t^2} + c^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{V} - c^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{V} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial t^2} + c^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{W} - c^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{W} &= 0,\end{aligned}$$

которые с учетом формулы векторного анализа

$$\Delta \bar{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{A} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{A}$$

приводят к волновым уравнениям для описания изменения \bar{V} и \bar{W}

$$\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \bar{V} = 0, \quad \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \bar{W} = 0.$$

Легко также показать, что к волновому уравнению Даламбера можно свести описание изменения скалярных величин p и q , а также скалярных и векторных потенциалов \bar{V} и \bar{W} .

Линейная система уравнений (8.14) описывает распространение в свободном однородном и изотропном пространстве с одинаковой скоростью как продольных волн (волны сжатия – разрежения), так и поперечных волн (волны сдвига). При этом моделирование продольных волн связано с наличием скалярных полей p и q . В акустике аналогом этих полей является поле возмущенного давления среды (с точностью до множителя pc – импеданса среды). В связи с чем можно условно назвать поля p и q полями давления, сопряженного с векторными полями \bar{V} и \bar{W} . Тем самым, также условно говоря, нами введена модельная газообразная однородная среда, обладающая полями сопряженного дав-

ления p и q , а система уравнений (8.14) описывает динамику линейных векторных полей \bar{V} и \bar{W} в данной модельной газообразной среде. Продолжая аналогию с гидромеханикой, можно, исходя из третьего и четвертого уравнений системы (8.14) восстановить уравнения неразрывности для векторных (силовых) полей \bar{V} и \bar{W} типа уравнения (8.7), вводя тем самым плотность модельной газообразной среды (ρ , соответственно, скорость распространения возмущений c). Моделирование волн сдвига системой уравнений (8.14) описывается по аналогии с системой уравнений электродинамики (8.11).

В работе [22] продемонстрирован также тот факт, что к системе вида (8.14) можно свести уравнения акустики и электродинамики, вводя в рассмотрение дополнительно соответствующие векторные потенциалы.

Гравитационное взаимодействие. В ньютоновской теории гравитации поле тяготения определяется векторным полем «напряженности» \bar{E} (гравитационного ускорения) и скалярным полем его потенциала ϕ ($\bar{E} = \text{grad } \phi$), удовлетворяющим уравнению

$$\text{div } \bar{E} = \Delta \phi = -4\pi G \rho, \quad (8.15)$$

где ρ – плотность гравитирующего вещества, $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$ – гравитационная постоянная. Для бесконечного евклидова пространства, везде заполненного средой с конечной плотностью, уравнение (8.15) не имеет какого-либо приемлемого с практической точки зрения решения. Для пустого евклидова пространства ($\rho = 0$) в случае сферической симметрии из (8.15) следует известный закон обратных квадратов, справедливость которого с высокой точностью подтверждена для сосредоточенных («точечных») масс.

Рассмотрим простейшую модификацию соотношения (8.15), учитывающую наличие распределенной в пространстве темной материи с постоянной ненулевой плотностью на бесконечности ρ_0 [19]. Удовлетворяющая такому граничному условию на бесконечности модификация может быть записана в форме

$$\text{div } \bar{E} = -4\pi G(\rho - \rho_0). \quad (8.16)$$

В областях пространства, где величина $\rho \approx \rho_0$, естественно выполняется опять закон обратных квадратов Ньютона. При предельно малом значении ρ_0 указанная модификация слегка корректирует исходный закон

тяготения (8.15), однако, как мы увидим в §14 и §19, весьма существенна при построении точных решений гравитирующей среды. Некоторые другие гипотезы по изменению вида исходного закона тяготения Ньютона описаны в §10.

§9. Факты

Настоящий параграф содержит краткое описание важных опытных данных экспериментальной физики и наблюдательной астрономии, полученных, в основном, за последние десятилетия благодаря существенному прогрессу в измерительному оборудованию и обсерваторной технике. Отбор фактического материала проведен из соображений его принципиальной важности для построения адекватных природным явлениям моделей теоретической физики. При изложении этого материала упор делается на экспериментальных результатах, объяснение которых вызывает определенные затруднения в рамках сегодняшних стандартных моделей.

Темная материя. ТМ, образующая до 95% от всей материи нашей Метагалактики, остается нерешенной узловой проблемой современности. Важно отметить, что все существующие и признанные теории развиты применительно только примерно к 5% всей материи Вселенной, остальная доминирующая часть зарегистрированной материи не имеет удовлетворительного теоретического обоснования.

Представим неоднократно описанные в литературе основные экспериментальные факты существования ТМ (см. по этому поводу [59-65, 95-97]).

Вопрос о возможности присутствия ТМ во Вселенной был поставлен астрономом Я. Ортом в 1932 году в связи с его измерениями движения звезд диска нашей Галактики Млечный Путь. Неожиданным выводом его измерений был существенный недостаток суммарной массы Галактики для объяснения скоростей вращения диска. Годом позже астроном Ф. Цвики, изучая динамику кластеров галактик, пришел к выводу, что наблюдаемая масса составляет только около 10% требуемой для разумного объяснения наблюдений общей массы в кластерах галактик. Позже были целенаправленно выполнены специальные спектральные и радиоскопические наблюдения скоростей вращения сотен спиральных галактик. Эти наблюдения продемонстрировали факт существенного увеличения общей массы галактик по направлению к краю звездного диска. Эти факты указывали на присутствие окружающих спиральные галактики шарообразных гало из материи, которая иначе не регистрировалась (т.е. была невидима). Тщательные наблюде-

ния эллиптических галактик и кластеров галактик также указывали на наличие невидимой темной материи, взаимодействующей гравитационно с видимыми объектами Вселенной [95-97].

Другим экспериментальным подтверждением являются горячие газообразные скопления, объяснение существования которых при их регистрируемых параметрах требует также привлечения ТМ в количествах, заметно превышающих видимую материю. Подчеркнем, что эмпирический факт существования ТМ в Метагалактике в настоящее время является общепризнанным.

Реликтовое излучение. Одним из наиболее ярких открытий астрономии второй половины XX века является регистрация в 1965 г. американскими радиоастрономами А. Пензиасом и Р. Вильсоном Космического Микроволнового Фонового Излучения – КМФИ (Cosmic Microwave Background Radiation – CMBR) [63-65, 98-100]. Наличие этого излучения было предсказано в 1948 г. Георгием Гамовым [101]. Согласно его идеи происхождения Вселенной в результате Горячего Большого Взрыва ГБВ (Hot Big Bang – HBB) данное излучение образовалось на ранних этапах развития Вселенной, «оторвалось» от излучающей его материи, когда Вселенная была экстремально горячей, и к настоящему времени успело остыть до очень низкой температуры. Г. Гамовым из весьма простых соображений была предсказана также температура КМФИ порядка 7 К [102, 103]. Тщательные исследования последних десятилетий показали, что распределение плотности излучения по частотам соответствует распределению излучения абсолютно черного тела с температурой 2,7 К. Данное его свойство говорит о том, что это не трансформированное излучение звездных объектов, а независимая от них самостоятельная субстанция, заполняющая пространство Вселенной. В связи с чем оно получило название «фонового». Подчеркивая его происхождение на начальном этапе развития Вселенной, широко также используют термин «реликтовое».

В настоящее время идут активные эксперименты по изучению мелкомасштабной анизотропии КМФИ и, как уже было отмечено, одним из важных результатов этих исследований является подтверждение «плоскостности» нашей Метагалактики [43, 44].

Дипольная анизотропия «нового эфира». Следуя Я.Б. Зельдовичу, КМФИ иногда называют «новым эфиром» [65]. Это название возникло в результате обнаружения в середине 70-х годов у КМФИ крупномасштабной дипольной анизотропии [75]. Опыты выполнялись в серии из 8 полетов на высоте 20 км на борту самолета U-2, принадлежащего Эймскому научному центру NASA. Анизотропия была обнаруже-

на на частоте 33 гигагерца (GHz) с помощью двойной радиометрической антенны Дике. Эта антenna измеряет разницу небесной температуры между двумя областями, расположенными под углом 60° в противоположных направлениях к зениту. Была зарегистрирована сферическая дипольная неравномерность в распределении температуры КМФИ с амплитудой $3,5 \pm 0,6 \cdot 10^{-3}$ К.

Данное обстоятельство позволяет ввести в окрестности нашей Галактики Млечный Путь космологическую выделенную систему отсчета, в которой фоновое излучение изотропно (с точностью до мелкомасштабных флуктуаций), ввести понятие «нового эфира», связанного с КМФИ, и определять движение объектов относительно этой системы. Так Солнечная система движется в направлении созвездия Льва со скоростью 390 км/с, наша Галактика летит к галактике Андромеды со скоростью около 600 км/с. Естественно, что отмеченное свойство КМФИ находится в противоречии с результатами опытов Майкельсона – Морли, лежащих в основе СТО.

Сверхсветовые импульсы. Важным опытным фактом в плане построения теоретических моделей является регистрация световых импульсов, распространяющихся со скоростями, превышающими скорость света в вакууме [77-82]. В первых экспериментах такого рода, выполненных в 60-х годах прошедшего столетия под руководством академика Н.Г. Басова [77], скорость перемещения изолированных световых импульсов в 6-9 раз превышала величину скорости света в вакууме. В экспериментах [79] зарегистрированная скорость движения импульса в инверсно заселенных парах цезия в 310 раз превысила скорость света в пустоте. Последние эксперименты такого рода [81, 82] дали также заметное превышение скорости света для изолированных бездисперсионных импульсов в средах.

В обзоре [104] дана попытка объяснения указанных фактов с позиций стандартной физической теории. Однако последние данные [81, 82] весьма затруднительно интерпретировать подобным образом. Указанные опытные факты превышения значения скорости света в вакууме изолированными сигналами имеют принципиальное значение при построении адекватных физических теорий.

Гамма-всплески. Актуальной нерешенной проблемой астрофизики является проблема мощных всплесков гамма-излучения, регистрация которых началась с середины 60-х годов с помощью специальной аппаратуры разведывательных спутников [105, 106]. В настоящее время подобные всплески регистрируются 3-5 раз в день и интенсивно изучаются [107-110]. Важной особенностью гамма-всплесков является их

послесвечение в рентгеновском и световом диапазонах, которое приходит к Земле значительно позже исходных всплесков.

Временная задержка послесвечения может составлять более года [108,109]. В настоящее время не существует адекватной явлению теоретической модели распространения гамма – всплесков на большие космологические расстояния, которая могла бы объяснить отсутствие, по-видимому, существенных потерь энергии распространяющихся всплесков.

Космические лучи. Происхождение космических лучей ультра-сверхвысоких энергий (свыше 10^{20} еВ) представляет собой труднообъяснимую проблему астрофизики [35, 111-114]. Регистрируемый уровень энергии находится далеко за допустимым по теории пределом энергетического спектра частиц первичных космических лучей (из-за известного эффекта взаимодействия с реликтовыми фотонами Грейзена – Зацепина – Кузьмина (ГЗК) [115, 116]). Загадкой остается не только механизм ускорения заряженных частиц до столь высоких уровней энергии, но и возможность их распространения на огромные космологические расстояния без существенных потерь энергии. Изложенная проблема получила название «парадокса ГЗК». Для ее решения предлагаются также теоретические построения за пределами современных стандартных моделей теоретической физики (см., например, [35]).

Космические струи. Астрофизической загадкой остаются также внегалактические «сверхсветовые» струи, распространяющиеся из центров квазаров и активных галактик [117]. Зарегистрированные в последние годы скорости распространения таких струй в 6–10 раз превышают скорость света в вакууме [118-120]. Одна из последних публикаций на эту тему сообщает о наличии квазара RKS 1127-145 гигантской струи длиной более 300 кпк (миллиона световых лет), содержащей свыше 300 стущений («бочек») [121].

В заключение этого параграфа подчеркнем, что перечисленные экспериментальные факты можно достаточно наглядно с позиций газодинамики объяснить в рамках классической механики Ньютона, используя модель НТМ как газообразной диспергирующей среды [20, 21] (см. дополнение).

§10. Гипотезы

«Я не измышляю гипотез (Hypotheses non fingo).»

Исаак Ньютон «Начала» [37]

Цель настоящего параграфа состоит в том, чтобы напомнить некоторые основополагающие гипотезы, на которых базируются целевые направления современной теоретической физики.

Абсолютизация скорости распространения слабых взаимодействий

«Второй постулат теории относительности: скорость света в свободном пространстве одинакова для всех наблюдателей вне зависимости от относительных скоростей источника света и наблюдателя.»

Толмен Р. «Относительность, термодинамика и космология» ([51], стр. 29)

«Эту скорость можно было бы, собственно говоря, назвать максимальной скоростью распространения взаимодействий... Очевидно, что наличие максимальной скорости распространения взаимодействий означает в то же время, что в природе вообще невозможно движение тел со скоростью, больше этой.»

Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц «Теория поля» ([46], стр. 12)

Данная гипотеза – одна из основных законодательных гипотез в современных моделях теоретической физики. Сформулируем ее в виде:

Скорость света в пустоте является фундаментальной мировой константой и непреодолимым верхним ограничением возможного диапазона скоростей движения материи и распространения сильных и слабых сигналов (возмущений, взаимодействий, волн и т.п.).

Данная абсолютизация скорости света в пустоте лежит в основе СТО, ОТО и целого ряда опирающихся на них других современных моделей теоретической физики. Подчеркнем важный факт, что регистрируемые нашим глазом и многими другими оптическими приборами сигналы представляют собой достаточно слабые (малой амплитуды) электромагнитные возмущения (импульсы) в известном оптическом диапазоне. Скорость распространения этих сигналов (скорость света) в пустоте (свободном пространстве) измерена с высокой точностью. Приведем ее с точностью до четырех знаков

$$c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

Однако целый ряд аккуратных экспериментов последних десятилетий все более убедительно говорят о том, что скорость распространения сильных сигналов с достаточно большой амплитудой (изолированных импульсов, гамма-всплесков), а также космических струй существенно превышает приведенное значение. Данное обстоятельство может в конце концов заставить еще раз проанализировать справедливость данной гипотезы. Наличие материальной субстанции в свободном пространстве также может скорректировать гипотезу о постоянстве скорости распространения в ней слабых взаимодействий.

Относительность времени и пространства

«Сущность теории относительности (СТО) состоит в следующем (это постулат): физические процессы протекают в четырехмерном пространстве (ct и пространственные координаты), геометрия которого псевдоевклидова. Принцип относительности есть частное проявление этого фундаментального постулата, не более... СТО низвергла их абсолютизм (времени и пространства) и сделала их относительными понятиями.»

A.A. Логунов «Лекции по теории относительности и гравитации: Современное состояние проблемы.» ([48], стр. 37, 38)

Данная гипотеза («постулат») в свете последних экспериментальных и теоретических результатов также может быть подвергнута сомнению. Наличие наряду с докритическим (досветовым) диапазоном скоростей сверхкритического (сверхсветового) диапазона естественно предполагает возможность перехода через критический «барьер» («световой барьер»). Возможность плавного перехода через аналогичный критический барьер («звуковой барьер») в аэромеханике и газодинамике доказана и не вызывает сомнений. При этом все эксперименты по плавному ускорению газообразной материи используют в том или ином виде известное правило обращенных воздействий [122, 123]. Подобное правило, возможно, должно работать и при переходе через световой барьер.

В сверхкритической области относительность времени и пространства изменяется. В теоретическом плане вместо докритических преобразований Лоренца становятся справедливыми сверхкритические преобразования Лоренца (§21) (с соответствующим изменением гиперболического интервала).

Следуя теоретической газовой динамике, можно достаточно легко преодолеть критический барьер в рамках классической механики Ньютона. При этом не требуется «менять» относительность времени и пространства, а достаточно вернуться к их абсолютным понятиям.

$E=mc^2$. Данное соотношение представляет собой наиболее яркую гипотезу релятивизма. Гипотеза дает бесконечное значение для массы материальных частиц при световой (критической) скорости в рамках стандартной СТО и мнимое значение массы покоя для тахионов (сверхсветовых частиц). Возможность перехода через световой барьер для материальных частиц также опровергает справедливость этого знаменитого соотношения между массой и энергией. Естественно формула приближенно работает при докритических и сверхкритических скоростях частиц (§29 и 30).

Кривизна пространства – времени и дополнительные измерения

«Основной стимул для рассмотрения пространства как многомерного дают теории, которые наиболее адекватным образом включают в себя гравитацию: теория струн и М-теория. Почти все варианты этих теорий естественно и/или самосогласованно формулируются в пространстве – времени с числом измерений больше четырех.»

B.A. Рубаков. «Большие и бесконечные дополнительные измерения.» ([36], стр. 913)

«Эйнштейновские уравнения гравитационного поля описывают связь этой кривизны пространства – времени с плотностью материи (т.е. с тензором энергии – импульса – натяжений).»

R. Пенроуз «Структура пространства – времени.» ([55], стр. 23)

Кривизна двумерной поверхности в трехмерном евклидовом пространстве естественное и наглядное понятие в практическом смысле. Ее математическое описание в достаточно общем виде было дано Гауссом. Обобщение «гауссовой» кривизны поверхности на случай многообразия n измерений было проведено Риманом в его диссертации 1854 г. Для нашего реального трехмерного мира кривизна пространства трех и более измерений чисто абстрактные понятия, однако в плане математической теории это весьма интересный объект исследований.

В случае абсолютности понятий времени и пространства нет особых смысла рассматривать связанное четырехмерное пространство –

время («мир Минковского»), его кривизну и геодезические. В то же время широко распространена гипотеза взаимозависимости многомерного пространства – времени, определяемого с помощью инвариантного интервала (6.1). При этом появляется математический смысл рассматривать кривизну гиперпространства 4 и более измерений и строить разнообразные геометро-полевые модели (ОТО и др.)

Другой яркой гипотезой, вводящей в рассмотрение дополнительные измерения, является гипотеза «мира на бране» (см., по этому поводу, интересный обзор [36]). Суть гипотезы в том, что обычное вещество локализовано на трехмерном многообразии («бране»), вложенном в многомерное пространство с большим и даже бесконечным числом измерений. «Параллельно с развитием фундаментальной теории («браны») исследования феноменологического характера привели к новому пониманию того, как могут появиться дополнительные измерения и как они могут способствовать решению известных проблем» [36].

Экспериментальных подтверждений наличия других пространственных измерений (кроме привычных нам трех евклидовых) в настоящее время не имеется.

Темная энергия и квинтэссенция. Изложим кратко гипотезу существования Темной Энергии (ТЭ). В соответствии с ОТО пространственно-временной континуум статической пустой Вселенной (без материи) не имеет кривизны, а расширяющаяся пустая Вселенная должна иметь отрицательную кривизну. Присутствие материи в расширяющейся Вселенной приводит к уменьшению кривизны по сравнению с ее значением для пустой расширяющейся Вселенной. В космологии вводится понятие критической плотности материи расширяющейся Вселенной, когда ее кривизна становится равной нулю и Вселенная приобретает плоскую геометрию. Отношение рассматриваемой плотности материи к ее критическому значению обозначается параметром Ω . В связи со сказанным для плоской Вселенной $\Omega=1$.

Популярная модель рождения Вселенной в результате ГБВ и инфляционный сценарий начального этапа этого рождения требует, чтобы параметр Ω точно был равен 1. По сегодняшним оценкам плотность барионной материи дает в Ω вклад только в размере около 4,5% от общей ее плотности ($\Omega_b = 0,045$). Суммарный вклад всей материи (темной и барионной) оценивается в 35–40% ($\Omega_M = 0,35 - 0,4$). Для того, чтобы в сумме обеспечить $\Omega=1$, вводят гипотезу существования ТЭ, которая должна покрывать (после перевода ее в массу с помощью соотношения $E = mc^2$) недостающие 60–65% плотности ($\Omega_\Lambda = 0,6 - 0,65$).

Вводимую гипотетическую ТЭ наделяют также отрицательным давлением, чтобы обеспечить эффект ускоряющегося расширения Вселенной (см. по этому поводу [59–61]).

Одной из наиболее дерзновенных гипотез современной физики является введение специальной субстанции – квинтэссенции (некоего аналога ТЭ), наделаемой достаточно уникальными свойствами и, в частности, обеспечивающей плоскость Вселенной ($\Omega=1$) и наблюдаемое ускорение ее расширения. Подобно античной греческой философии (академической школе Платона) ее считают пятым элементом, после воздуха, земли, воды и огня. Свойства квинтэссенции достаточно подробно рассмотрены в работах [59–62].

Выходы

«Правило I. Не должно требовать в природе других причин, сверх тех, которые истинны и достаточны для объяснения явлений».

Исаак Ньютон «Начала» [37]

1. Время абсолютно, одномерно, однородно, однонаправленно, бесконечно и абстрактно.
2. Пространство абсолютно, трехмерно, однородно, изотропно, бесконечно и абстрактно.
3. Пространство не имеет кривизны (является «плоским», евклидовым).
4. Время и три пространственные координаты независимы. Использование «зависимых» координат (например, комплексных переменных и плоскости, псевдоевклидова пространства – времени Минковского (3.21), (3.24), других пространств с метрикой (3.22), (3.23) или многомерных пространств с метрикой (6.1)) накладывает существенные ограничения на соответствующие математические модели и их адекватность реальным физическим процессам.
5. Материя нашей Метагалактики представлена трудно регистрируемой суббарионной темной материи (около 95%, с массой частиц в ньютоновском приближении порядка $6 \cdot 10^{-40}$ кг) и барионной материи (около 5%).
6. Абсолютное движение в нашей Метагалактике есть перемещение объекта в абсолютной системе координат, начало которой естественно поместить в «исходной точке» Большого Взрыва. Относительно

- тельное движение есть перемещение объекта в других системах координат.
7. В природе действует принцип относительности Галилея: все законы одинаковы в рамках любой инерциальной системы отсчета. Современная техника измерений позволяет регистрировать движение барионной материи относительно суббарионной темной материи (эфира).
 8. Математические модели физических процессов, удовлетворяющие требованиям инвариантности относительно группы преобразований Галилея, в большей степени адекватны природе, чем модели, неудовлетворяющие этим требованиям (например, модели, удовлетворяющие свойствам инвариантности относительно преобразований Лоренца, несправедливы в диапазоне трансветовых скоростей).
 9. Скорость света «в вакууме» не является абсолютной мировой константой. Опытные данные подтверждают возможность движения материи и передачи информации со сверхсветовыми скоростями.
 10. Современная физика, основанная на «релятивистских» принципах, не может объяснить многие опытные данные последних десятилетий. Для выхода из этой ситуации наряду с развитием физики «за пределами» стандартных современных моделей следует тщательно проанализировать возможности классической физики («до пределов» стандартных моделей).

ГЛАВА II. КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

В настоящей главе рассматриваются гидродинамические модели диспергирующих сред обычной (барионной) материи. Эффекты дисперсии в этих моделях имеют различную физическую природу. Рассмотренные примеры охватывают диспергирующую легкоподвижную среду с микроструктурой (§11), квазинейтральную плазму с электрическим взаимодействием (§12), замагниченную плазму (§13) и гравитирующую газообразную среду (§14). Особое внимание уделено моделям, в которых совместное влияние нелинейных и дисперсионных эффектов приводит к образованию устойчивых уединенных волн – солитонов (§15). Некоторые из изложенных здесь моделей затем будут распространены на описание динамики суббарионной материи и моделирование ряда физических и астрофизических явлений (в основном явлений, адекватное описание которых затруднительно в рамках современной физики).

§11. Гидродинамическая среда с микроструктурной дисперсией

«При размерах течения, сравнимых с длиной свободного пробега молекул, действуют законы как дискретного движения частиц, так и непрерывной среды, описывающие характерные особенности коллективного движения материи, имеющей молекулярную структуру. Особенности структуры при таком движении сохраняются только в форме интегральных характеристик, таких как плотность, давление, температура, вязкость.»

М.Д. Милионников «Некоторые проблемы турбулентности» [124]

Традиционными моделями, описывающими динамику газообразной среды, являются газокинетическая и феноменологическая модели (см., например, [1-7]). Газокинетическая модель основана на статистическом описании среды как совокупности молекул. В этой модели вводится функция распределения молекул по их координатам в пространстве и скоростям. Функция распределения определяется из решения уравнения Больцмана [33]. Эта газокинетическая модель успешно используется при изучении динамики сильно разреженных газов.

Феноменологическая континуальная модель оперирует с осредненными параметрами газообразной среды, непрерывно распределенными по всему занимаемому газом пространству. При этом предполагается наличие достаточно большого числа молекул в каждом рассматриваемом предельно малом объеме, отождествляемом с материальной точкой. Изменение осредненных параметров газообразной среды описывается законами сохранения массы, импульса и энергии. Подобная модель является основной моделью изучения динамики газообразных достаточно плотных сред [1-7].

Отметим также наличие некоей промежуточной области между областями обоснованного применения газокинетической и феноменологической моделей. Так, возьмем характерный линейный размер l порядка длины свободного пробега молекул в газообразной среде, когда начинают сказываться эффекты индивидуального движения молекул. Напомним, что для воздуха в нормальных условиях длина свободного пробега молекулы имеет порядок $0,1 \text{ мк}$ (10^{-7} м). Однако при этом кубик воздуха со стороной $l=0,1 \text{ мк}$ продолжает содержать до 30 тысяч молекул. Выполняя осреднение параметров среды по этому достаточно большому числу молекул, можно опять привлечь модель континуального описания среды на характерных размерах, порядка длины свободного пробега молекул. Эта модель на больших линейных масштабах ($L \gg l$) переходит в обычную феноменологическую модель [31, 32].

В настоящем параграфе рассматривается возможность распространения феноменологической модели описания на области порядка длин свободного пробега молекул. Здесь в уравнениях движения появляются дополнительные дисперсионные слагаемые, содержащие характерный микромасштаб l порядка длины свободного пробега. В связи с чем подобную модель можно назвать гидродинамической моделью с микроструктурной дисперсией. С определенной степенью осторожности, следя М.Д. Милионщиковой, скажем, что данная модель вводит в рассмотрение дополнительные «коллективные» эффекты движения молекул в материальной точке (типа вращения и осцилляций).

Приближение сплошности. К основным величинам, характеризующим состояние газообразной среды при ее континуальном описании, относятся плотность ρ , вектор скорости \bar{v} и удельная внутренняя энергия e . Плотность ρ определяется как предел отношения суммарной массы всех молекул в окружающем точку объеме к его величине при стремлении объема к нулю, скорость \bar{v} – как предел отношения суммарного количества движения всех молекул объема к суммарной их

массе, удельная внутренняя энергия e – как предел отношения суммарной энергии всех молекул объема (в системе координат, движущейся со скоростью \bar{v}) к суммарной их массе. При этом постулируется, что рассматриваемые пределы существуют и конечны. Характерный размер материальной точки в пределе считается нулевым, а указанные предельные параметры среды в этой точке имеют ее координаты. Тем самым определяются сплошные (непрерывные) распределения параметров среды в изучаемой области пространства. Эти распределения представляют собой объект изучения в феноменологической модели сплошной среды.

Интегральные законы сохранения. Рассмотрим конечный объем $\omega(t)$, состоящий из одних и тех же материальных частиц среды (материальный объем). Состояние среды в этом объеме удобно характеризовать величинами массы $\iiint_{\omega(t)} \rho d\omega$; импульса $\iiint_{\omega(t)} \rho \bar{v} d\omega$ и энергии

$\iiint_{\omega(t)} \rho (e + \frac{q^2}{2}) d\omega$, где $q = |\bar{v}|$ – модуль вектора скорости, а величина энергии (полной энергии) включает удельную внутреннюю e и кинетическую $q^2/2$ энергию.

Постулируется справедливость законов сохранения массы, импульса и энергии. Закон сохранения массы движущегося объема $\omega(t)$ записывается в виде

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\omega(t)} \rho d\omega = 0. \quad (11.1)$$

Закон сохранения импульса (количества движения)

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\omega(t)} \rho \bar{v} d\omega = \bar{F}, \quad (11.2)$$

где \bar{F} – главный вектор всех сил, приложенных к объему $\omega(t)$. Закон сохранения энергии

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\omega(t)} \rho (e + \frac{q^2}{2}) d\omega = W + Q, \quad (11.3)$$

где W – мощность внешних сил, Q – скорость притока дополнительной энергии.

В рамках настоящей монографии рассматриваются в основном модели невязкой и нетеплопроводной газообразной среды. В этом параграфе к тому же ограничимся наличием только поверхностных сил давления и считаем $Q=0$. Тогда вектор сил \bar{F} выражается через поверхностный интеграл

$$\bar{F} = - \iint_{\sigma(t)} p \bar{n} d\sigma, \quad (11.4)$$

где $\sigma(t)$ – поверхность объема $\omega(t)$, \bar{n} – вектор единичной внешней нормали к поверхности $\sigma(t)$, а мощность внешних сил

$$W = - \iint_{\sigma(t)} p \bar{n} \cdot \bar{v} d\sigma. \quad (11.5)$$

Система интегральных законов сохранения (11.1) – (11.3), дополненная соотношениями (11.4) и (11.5), замыкается уравнением состояния газообразной среды

$$p = p(\rho, e). \quad (11.6)$$

Выпишем также законы сохранения для фиксированного по времени объема ω , которые эквивалентны соотношениям (11.1) – (11.5)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\omega} \rho d\omega + \iint_{\sigma} \rho \bar{v} \cdot \bar{n} d\sigma = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\omega} \rho \bar{v} d\omega + \iint_{\sigma} (\rho \bar{n} + \rho \bar{v})(\bar{v} \cdot \bar{n}) d\sigma = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\omega} \rho \left(e + \frac{q^2}{2} \right) d\omega + \iint_{\sigma} \left(p + \rho \left(e + \frac{q^2}{2} \right) \right) \bar{v} \cdot \bar{n} d\sigma = 0 \end{aligned} \quad (11.7)$$

Здесь $\frac{\partial}{\partial t}$ – частная производная по времени, которая может быть внесена под знак интеграла.

Дифференциальные законы сохранения. Из интегральных соотношений (11.7) следуют дифференциальные законы сохранения (дифференциальные уравнения в дивергентной форме), которые мы запишем для декартовой системы координат x, y, z ,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \bar{v}) = 0, \\ & \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} + \operatorname{div}(\rho u \bar{v}) = 0, \\ & \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} + \operatorname{div}(\rho v \bar{v}) = 0, \\ & \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} + \operatorname{div}(\rho w \bar{v}) = 0, \\ & \frac{\partial(\rho(e + \frac{q^2}{2}))}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \bar{v}(e + \frac{q^2}{2} + \frac{p}{\rho})) = 0. \end{aligned} \quad (11.8)$$

Системы уравнений в виде интегральных (11.1) – (11.3), (11.7) и дифференциальных (11.8) законов сохранения имеют идентичные обобщенные решения, т.е. решения, содержащие помимо гладких и разрывные решения (см., например, [125–127]).

Выпишем также уравнения в продифференцированной форме с выделенной субстанциональной производной (оператором дифференцирования в частице). Эти уравнения следуют из (11.8) и имеют вид

$$\begin{aligned} & \frac{dp}{dt} + \rho \operatorname{div} \bar{v} = 0, \\ & \frac{d\bar{v}}{dt} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = 0, \\ & \frac{de}{dt} + \frac{p}{\rho} \operatorname{div} \bar{v} = 0. \end{aligned} \quad (11.9)$$

Уравнения (11.9) справедливы только в области гладких решений.

Для гладких решений в рассматриваемом случае идеального (невязкого и нетеплопроводного газа) справедлив также закон сохранения энтропии

$$\frac{dS}{dt} = 0, \quad (11.10)$$

который следует из (11.9) и первого начала термодинамики.

О микроструктурной дисперсии. В каждой материальной точке пространства вводится характерный микромасштаб l порядка длины свободного пробега молекул, определяющий пространственный размер

возможных коллективных движений и взаимодействий молекул, по которым проводится осреднение параметров в данной точке [31, 32]. Масштаб l , как будет показано ниже, позволит учесть эффекты микроструктурной дисперсии в феноменологических моделях легкоподвижных сплошных сред. Пространственное осреднение параметров в каждой точке выполним с учетом конечности указанного масштаба l . Приведем сначала формулу осреднения для одномерного случая. Имеем

$$\overline{u(x,t)} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l u(x-\xi, t) d\xi, \quad (11.11)$$

и выразим ее через дифференциальное приближение

$$\overline{u(x,t)} = u(x,t) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{l^{2p}}{(2p+1)!} \frac{\partial^{2p} u}{\partial x^{2p}}. \quad (11.12)$$

Если ограничить искомую функцию $u(x,t)$ условием малости слагаемых, содержащих производные четвертого порядка и выше, то получаем приближение

$$\overline{u(x,t)} = u(x,t) + \frac{l^2}{3!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(l^4). \quad (11.13)$$

Использование в уравнениях гидродинамики вместо исходных осредненных в материальной точке функций $\overline{u(x,t)}$ их выражений типа (11.12) и (11.13) в явном виде вводит в рассмотрение эффекты микроструктурной дисперсии, описывающиеся четными частными производными второго и более высоких порядков. При этом влияние дисперсии учитывается только с помощью единого дополнительного характерного масштаба дисперсионного процесса l , который требует аккуратного физически адекватного определения. В связи с этим отметим аналогию с диссипативными процессами вязкости и теплопроводности, которые также учитываются путем введения единых коэффициентов вязкости и теплопроводности.

Аналогичные (11.11) процедуры осреднения несложно выполнить для двумерного и трехмерного случаев. Для любой функции $f(u)$ в материальной точке учет конечности дисперсионного микромасштаба l фактически сводится к умножению этой функции на дифференциальный оператор вида (в одномерном случае)

$$N = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{l^{2p}}{(2p+1)!} \frac{\partial^{2p}}{\partial x^{2p}}. \quad (11.14)$$

Микроструктурная дисперсия в модели Бюргерса.

В качестве простейшего примера демонстрации учета микроструктурной дисперсии для нелинейных вязких процессов рассмотрим уравнение Бюргерса [128]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \alpha = \text{const} > 0, \quad (11.15)$$

которое запишем в дивергентной форме

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} - \alpha \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0. \quad (11.16)$$

Полагая, что уравнение (11.16) определяет осредненную в материальной точке величину \bar{u} , и используя формулу (11.14), приходим к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} (Nu) + \frac{\partial}{\partial x} \left(N \left(\frac{u^2}{2} - \alpha \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) = 0. \quad (11.17)$$

Из уравнения (11.17) с точностью $O(l^4 + \alpha l^2)$ получаем квазилинейное уравнение третьего порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{l^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial x^2} + \frac{l^2}{6} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(\frac{u^2}{2} \right) = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (11.18)$$

Несложно видеть, что уравнение (11.18) инвариантно относительно группы преобразований Галилея [29]. Точные стационарные решения уравнения (11.18) и их важные свойства проанализированы в §16.

Микроструктурная дисперсия в гидродинамической модели.

Рассмотрим систему уравнений гидродинамики в дивергентной форме

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla F = 0, \quad U = \begin{pmatrix} \rho \\ m \\ \epsilon \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} m \\ \Pi - \tau \\ E \end{pmatrix}. \quad (11.19)$$

Здесь ρ – плотность, m – вектор импульса единицы объема, $m = \rho q$, q – вектор скорости, e – удельная энергия единицы объема, $\varepsilon = \rho(e + q^2/2)$ – удельная внутренняя энергия, Π – тензор второго ранга с компонентами (в тензорных обозначениях)

$$\Pi_{ij} = p\delta_{ij} + \rho q_i q_j,$$

p – давление, τ – тензор вязких напряжений с компонентами

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial q_j}{\partial x_i} + \frac{\partial q_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \nabla \bar{q} \delta_{ij} \right),$$

E – вектор потока энергии

$$E = m(\varepsilon + p)/\rho - \tau \cdot m/\rho - k \nabla e / c_v,$$

μ и k – коэффициенты молекулярной вязкости и теплопроводности, c_v – удельная теплоемкость при постоянном объеме.

Выполняя осреднение уравнений (11.19) и (11.12) по малому, не зависящему от времени, объему G ($I^3 \approx G$), разложение функций \bar{U} в ряд Тейлора и интегрирование, переходим к соответствующим дифференциальным соотношениям

$$\frac{\partial}{\partial t}(N \cdot U) + \nabla \cdot (N \cdot F) = 0. \quad (11.20)$$

Пренебрегая в (11.10) слагаемыми порядка $O(I^4 + \mu I^2)$, получаем первые дифференциальные приближения осредненных уравнений гидродинамики (11.10). В качестве примера приведем вид оператора N для первых дифференциальных приближений в трехмерном случае

$$N = 1 + \frac{I^2}{3!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{I^2}{3!} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{I^2}{3!} \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (11.21)$$

Для двухмерного случая аналогичные дифференциальные приближения для уравнений Навье – Стокса были указаны в [29] из условий инвариантности относительно геометрической группы преобразований Галилея.

Путем интегрирования уравнений (11.20) можно получать и анализировать поведение осредненных решений уравнений гидродинамики

(по аналогии с изложенным в предыдущем пункте на примере осредненных решений уравнения Бюргерса).

§12. Плазма с электрическим взаимодействием

Дваждыкостное приближение. Рассматривается гидродинамическая «дваждыкостная» модель холодной плазмы в отсутствие внешних полей. Предполагается, что ионная и электронная компоненты плазмы слабо взаимодействуют между собой и в общем случае имеют различные температуры T_i и T_e (т.е. плазма является достаточно разреженной).

Основные уравнения движения ионной и электронной компонент плазмы в этом приближении принимают вид [8, 129, 130]

$$\frac{\partial n_{i,e}}{\partial t} + \operatorname{div}(n_{i,e} \bar{v}_{i,e}) = 0, \quad (12.1)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_{i,e}}{\partial t} + (\bar{v}_{i,e} \cdot \nabla) \bar{v}_{i,e} = -\frac{1}{n_{i,e} m_{i,e}} \nabla p_{i,e} - \frac{e_{i,e}}{m_{i,e}} \nabla \phi, \quad (12.2)$$

$$\Delta \phi = -4\pi e(n_i - n_e). \quad (12.3)$$

В (12.1) – (12.3) индексы i, e указывают сорт частиц (ионы, электроны, причем $e_i = e = -e_e$), n – концентрация частиц, p – давление, \bar{v} – вектор скорости, ϕ – потенциал электрического поля. Приведенная система уравнений является инвариантной относительно группы преобразований Галилея.

Остановимся подробнее на случае достаточно медленных (ионных) колебаний плазмы с пренебрежимо малым временем релаксации электронов.

Для таких медленных колебаний плазмы их обратные времена много меньше электронной ленгмюровской частоты

$$\tau^{-1} \ll \omega_v = \left(\frac{4\pi n_0 e^2}{m_e} \right)^{1/2}. \quad (12.4)$$

Для электронов с пренебрежимо малым временем релаксации их концентрация с хорошим приближением описывается распределением Больцмана, следующим из (12.2). При $T_e = \text{const}$ и $p_e = n_e T_e$ имеем

$$n_e = n_0 \exp(e\phi/T_e). \quad (12.5)$$

В (12.4) и (12.5) величина n_0 представляет собой невозмущенную концентрацию заряженных частиц (невозмущенная плазма считается электронейтральной).

С учетом сделанных предположений уравнения движения ионного газа перепишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div}(n_i \bar{v}_i) &= 0, \\ \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + (\bar{v}_i \cdot \nabla) \bar{v}_i &= -\frac{1}{n_i m_i} \nabla p_i - \frac{e}{m_i} \nabla \phi, \\ \Delta \phi &= 4\pi e(n_0 \exp(e\phi/T_e) - n_i). \end{aligned} \quad (12.6)$$

Система уравнений (12.6) замыкается уравнением состояния ионного газа. Для изотермических движений имеем

$$p_i = n_i T_i, \quad (12.7)$$

для адиабатических движений

$$p_i / p_0 = (n_i / n_0)^{\kappa}, \quad (12.8)$$

κ – показатель адиабаты.

Введем для удобства дальнейшего изложения следующие положительные параметры

$$\begin{aligned} D^2 &= T_e / 4\pi n_0 e^2, \quad c_i^2 = T_i / m_i, \quad c_e^2 = T_e / m_e, \\ c_0^2 &= T_e / m_i = m_e c_e^2 / m_i. \end{aligned} \quad (12.9)$$

Здесь D – дебаевский радиус, c_i и c_0 – характерные скорости, подсчитанные по ионной и электронной температуре.

С использованием (12.7) и (12.9) система (12.6) принимает форму (индекс i здесь и далее опускаем)

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n \bar{v}) &= 0, \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} &= -\frac{c_i^2}{n} \nabla n - c_0^2 \nabla \phi, \\ D^2 \Delta \phi &= \exp(\phi) - n. \end{aligned} \quad (12.10)$$

В (12.10) и ниже все величины считаются безразмерными, причем концентрация ионов отнесена к своему невозмущенному значению n_0 , потенциал – к величине $\phi_0 = T_e/e$, скорость и координата – к своим характерным значениям v_0 и l_0 , время к $t = l_0/v_0$.

Преобразование уравнений движения ионов. Исключим из двух последних уравнений (12.10) величину потенциала электрического поля ϕ . С этой целью применим сначала операцию grad к третьему уравнению

$$D^2 \nabla \Delta \phi = \exp(\phi) \nabla \phi - \nabla n$$

и исключим экспоненту ($\exp(\phi) = n + D^2 \Delta \phi$)

$$D^2 \nabla \Delta \phi = n \nabla \phi + D^2 \Delta \phi \nabla \phi - \nabla n.$$

Подставляя выражение

$$n \nabla \phi = \nabla n + D^2 \nabla \Delta \phi - D^2 \nabla \phi \Delta \phi$$

в (12.10), приходим к системе

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n \bar{v}) &= 0, \\ n \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + n(\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} &= -(c_i^2 + c_0^2) \nabla n - D^2 c_0^2 \nabla \Delta \phi + D^2 c_0^2 \nabla \phi \Delta \phi. \end{aligned} \quad (12.11)$$

Из двух последних слагаемых второго уравнения несложно окончательно исключить величину потенциала ϕ с помощью второго уравнения системы (12.10).

Таким образом, нами получена замкнутая система уравнений, определяющая изменение концентрации n и скорости \bar{v} ионного газа.

Одномерная система уравнений движения ионного газа. Приведем с учетом дальнейшего изложения окончательный вид одномерной нестационарной системы уравнений движения ионного газа при наличии дисперсионных эффектов, обусловленных наличием электрического взаимодействия с электронной компонентой. Из (12.11) получаем квазилинейную систему дифференциальных уравнений третьего порядка, которой удобно придать дивергентную форму

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial n u}{\partial t} + \frac{\partial n u^2}{\partial x} &= -(c_i^2 + c_0^2) \frac{\partial n}{\partial x} + \\ &+ D^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c_i^2}{n} \frac{\partial n}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{D^2}{2c_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c_i^2}{n} \frac{\partial n}{\partial x} \right)^2, \end{aligned} \quad (12.12)$$

где u – проекция скорости ионного газа на ось x , $c^2 = c_i^2 + c_0^2$ – так называемая скорость ионного звука.

Система (12.12) инвариантна относительно группы преобразований Галилея. Из системы (12.12) при $T_i = 0$ и при выполнении условий $D^2 \ll 1$ и $n - 1 - u/c_0 \ll 1$ следуют уравнения Буссинеска [8]. Дальнейшая линеаризация относительно решений типа «простой» волны приводит к известному уравнению Кортевега – де Вриза. При этом, однако, теряются некоторые свойства инвариантности.

§13. Замагниченная плазма низкого давления

Дисперсионные эффекты, связанные с наличием магнитного поля, можно наглядно продемонстрировать на примере решения уравнений гидродинамического типа для замагниченной плазмы низкого давления [8, 131]. Данному направлению исследований посвящены, в частности, работы [132–135]. В настоящей монографии внимание удалено, в основном, решениям солитонного типа.

Гидродинамическое приближение. Рассматриваются медленные движения квазинейтральной двухкомпонентной неизотермической плазмы ($T_e \gg T_i$) в постоянном магнитном поле \bar{B} при достаточно малом значении параметра $\beta = 8\pi n_0 T_e / B^2$. С целью наглядной демонстрации влияния дисперсии проанализируем случай, когда все искомые величины зависят лишь от двух независимых переменных (x, z) прямоугольной декартовой системы координат (x, y, z) и ось z совместим с направлением магнитного поля.

Исходная система гидродинамических уравнений движения ионов с температурой $T_i = 0$ принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n u}{\partial x} + \frac{\partial n w}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{e}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -u \Omega, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{e}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{aligned} \quad (13.1)$$

Здесь n – плотность ионов, u, v, w – проекции вектора скорости на оси x, y, z декартовой системы координат, φ – потенциал электрического поля, e – элементарный электрический заряд, m – масса иона и $\Omega = eB/mc$ – циклотронная частота. Предположение о том, что характеристические частоты рассматриваемых движений достаточно малы $\omega \ll \Omega$, позволяет пренебречь инерцией электронов и использовать для них обычное распределение Больцмана. Тогда с учетом условия квазинейтральности плазмы система уравнений (13.1) замыкается соотношением

$$n = n_0 \exp(e\varphi/T_e), \quad (13.2)$$

где n_0 – значение невозмущенной плотности ионов. Подчеркнем, что в данном случае дисперсионные эффекты обусловлены только влиянием магнитного поля на движение ионов.

Уравнение для ионно-звуковых солитонов. Пусть система уравнений обладает решениями в виде стационарных плоских волн, распространяющихся со скоростью U в направлении, определяемом направляющими косинусами k_x и k_z ($k_x^2 + k_z^2 = 1$). Для этих решений после перехода в движущуюся систему координат $\xi = k_x x + k_z z - Ut$ из уравнений (13.1) и (13.2) можно получить соотношение [135]

$$\frac{d}{d\xi} \left[\left(1 - \frac{U^2}{n^2} \right) n \frac{dn}{d\xi} \right] = n - 1 - \frac{k_z^2}{U^2} (n - 1)n. \quad (13.3)$$

При выводе формулы (13.3) используются граничные условия $n=1$ и $u=w=0$ при $\xi \rightarrow \infty$, причем плотность n отнесена к n_0 , скорость U – к

скорости ионного звука $c = \sqrt{T_i/m}$, а координата ξ – к величине «гирорадиуса» $R = c/\Omega$.

В работе [135] уравнение (13.3) однократным интегрированием сведено к уравнению $(dn/d\xi)^2 + \psi(n; U, k_z) = 0$, из которого с учетом дополнительного условия $dn/d\xi = 0$ при $n = n_{\max} > 1$ получено нелинейное дисперсионное соотношение, связывающее амплитуду солитона с его скоростью. Показано также, что солитонные решения с $n_{\max} > 1$ существуют при $U < 1$ и в приближении малых амплитуд переходят в соответствующие решения уравнения Кортевега – де Вриза.

В §18 исследование солитонных решений уравнения (13.3) выполнено на фазовой плоскости (n, p) , где $p = dn/d\xi$.

§14. Гравитирующая газообразная среда

«Раньше мы рассуждали, исходя из следующих предположений:

1. Существует некоторая средняя плотность материи во всем пространстве, которая всюду одна и та же и отлична от нуля.
2. Размеры («радиус») пространства не зависят от времени.

Оба эти предположения могут быть согласованы с общей теорией относительности лишь после добавления в уравнения поля гипотетического члена, который не следует из теории и не представляется естественным с теоретической точки зрения («космологический член в уравнениях гравитационного поля»).»

A. Эйнштейн «О специальной и общей теории относительности» [36]

Ниже излагается феноменологическая модель газообразной среды при наличии собственного гравитационного силового поля. Наглядное описание моделей гравитирующего газа можно найти в монографиях Л.И. Седова [5] и К.П. Станюковича [4]. Основное отличие материала настоящего параграфа от изложенного в [4,5] состоит в том, что в соответствии с опытными данными последних десятилетий свободное от барионной материи (пустое) пространство содержит невидимую гравитирующую материю, плотность которой на бесконечности (на доста-

точно удаленных расстояниях от гравитирующих объектов) конечна. Обозначим ее через ρ_0 . Тем самым эффекты гравитации нами будут определяться с использованием двух размерных величин: гравитационной постоянной $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ сек}^{-2}$ и ненулевой плотностью пустого пространства (плотностью гравитирующего вещества на бесконечности) ρ_0 . Отметим, что такой часто используемый в космологии параметр, как средняя плотность вещества во Вселенной, при огромных ее масштабах будет приближаться к значению ρ_0 (т.е. эта величина может иметь порядок $0,5 \cdot 10^{-29} + 10^{-30} \text{ г/см}^3$).

Гравитационная частота и период. Из двух размерных параметров G и ρ_0 , определяющих гравитационное взаимодействие в нашем случае, методами размерности [14] получим гравитационную частоту ω_g и гравитационный период T_g нашей Метагалактики. Имеем

$$\omega_g = \sqrt{4\pi G\rho_0}, \quad T_g = 1/\omega_g. \quad (14.1)$$

В случае, если скорость света c в вакууме принять также определяющей процесс константой, то получим характерный линейный размер Метагалактики

$$L_g = cT_g \quad (14.2)$$

При $\rho_0 = 0,5 \cdot 10^{-29} \text{ г/см}^3$ величина T_g примерно соответствует возрасту нашей Вселенной на сегодняшний момент ее истории ($T_g \approx 1,4 \cdot 10^{10}$ лет)*.

Укажем здесь также аналогию с плазменной частотой [129, 130]. Соотношения (14.1) легко следуют из модельной одномерной задачи колебания точечной массы около слоя гравитирующего вещества толщиной x с плотностью ρ_0 . Уравнение таких колебаний точечной массы под действием однородного гравитационного поля запишется в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -4\pi G\rho_0 x. \quad (14.3)$$

* На наличие характерного линейного размера в рассматриваемом случае (при трех размерных величинах ρ_0 , G и c , определяющих задачу) было указано А.Б. Ватажиным.

Это уравнение описывает простое гармоническое колебание с круговой частотой ω_g , определяемой формулой (14.1).

Гидродинамическая система уравнений гравитирующей среды. Выпишем исходные уравнения движения идеальной (невязкой и нетеплопроводной) газообразной среды (уравнения Эйлера) с учетом собственного гравитационного взаимодействия частиц среды [4,5]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \bar{v}) &= 0, \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} &= -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \bar{F}. \end{aligned} \quad (14.4)$$

Здесь удельная сила \bar{F} характеризует гравитационное взаимодействие.

Важным принципиальным отличием от аналогичного рассмотрения в [4,5] является уравнение для определения силового гравитационного поля \bar{F} , которое здесь выписывается с учетом ненулевой плотности ρ_0 на бесконечности (в пустом пространстве)

$$\operatorname{div} \bar{F} = 4\pi G(\rho_0 - \rho). \quad (14.5)$$

В общем случае постановка такой задачи замыкается уравнением сохранения энергии и уравнением состояния. В случае изотермического или адиабатического процесса система (14.4) и (14.5) представляет собой замкнутую систему уравнений. Эта система имеет в одномерном случае класс точных стационарных решений, которые подробно исследованы в §19.

Подчеркнем, что слагаемое, содержащее ρ_0 в соотношении (14.5), можно условно назвать «космологическим членом», по аналогии с соответствующим слагаемым, введенным А. Эйнштейном в его уравнения гравитации [136].

§15. Моделирование солитонов

Важным свойством рассматриваемых в настоящей монографии нелинейных моделей динамики газообразной среды является наличие точных решений солитоноподобной формы. Не приводя здесь обширную библиографию по солитонным решениям уравнений гидродинамического типа, укажем ряд книг и обзоров по гравитационным волнам на поверхности жидкости и ионно-звуковым солитонам в гидродинамических моделях плазмы [8, 137-139]. Классические солитоны представля-

ют собой уединенные волны конечной амплитуды, распространяющиеся с постоянной скоростью без изменения своей формы и удовлетворяющие нулевым граничным условиям на бесконечности. Отличные от классических солитонные частицеподобные решения были получены в [25-27] как стационарные решения уравнений двухжидкостной модели холодной плазмы.

Модельные уравнения для солитонов. Простейшими модельными уравнениями, обладающими солитонными решениями, являются уравнение Кортевега – де Вриза [140, 141]

$$u_t + uu_x + \beta u_{xx} = 0 \quad (15.1)$$

и регуляризованное уравнение для длинных волн [142, 143]

$$u_t + uu_x - \beta u_{xx} = 0, \quad (15.2)$$

в которых величина β – малый положительный множитель перед линейными старшими производными, отвечающими за дисперсионные эффекты.

Уравнения (15.1) и (15.2) обладают решениями в виде уединенных волн (солитонов)

$$u(x, t) = 3a \operatorname{sech}^2(kx + \omega t + b), \quad (15.3)$$

где $k = 1/2\sqrt{\beta}$, $\omega = ka$, a и b – произвольные константы, определяющие скорость солитона и положение его центра (фазу). Как следует из (15.3), скорость распространения любого солитона однозначно связана с его амплитудой и равна одной трети от величины амплитуды. Подчеркнем, что уравнения (15.1) и (15.2) не инвариантны относительно группы преобразований Галилея. В частности, уравнение (15.1) не является инвариантным относительно подгруппы вращения, а уравнение (15.2) – относительно галилеевого переноса.

Инвариантное уравнение. Ниже рассматриваются солитонные решения простейшего квазилинейного уравнения третьего порядка, являющегося инвариантным аналогом уравнений (15.1) и (15.2), вида

$$u_t + uu_x - \beta u_{xx} - \beta uu_{xx} = 0 \quad (15.4)$$

при постоянном $\beta > 0$. Уравнение (15.4) было получено в [29], исходя из условий инвариантности относительно группы преобразований Галилея и его свойства изучены в работах [23, 30].

Существенной отличительной особенностью уравнения (15.4) от уравнений (15.1) и (15.2) является наличие только одного закона сохранения, а именно, самого уравнения, которое легко записать в дивергентном виде

$$(u - \beta u_{xx})_t + (u^2/2 - \beta uu_x + \beta u_x^2/2)_x = 0. \quad (15.5)$$

Других законов сохранения для решений (15.4) получить не удается из-за появления слагаемого типа «квадратичной вязкости» $(\beta u_x^2/2)_x$. В то же время для решений (15.1) справедливо бесконечное число законов сохранения [144], а для решений (15.2) найдено два закона [142]. Солитонные решения уравнения (15.4) продемонстрированы в §20.

Выводы

1. Дисперсионные эффекты определяют широкий класс процессов в газообразных средах. Яркими примерами диспергирующих сред являются среды с собственными (внутренними) силовыми полями электрической, магнитной и гравитационной природы. Другими характерными примерами таких сред служат среды с микроструктурой.
2. Континуальные модели гидродинамического типа, основанные на классической механике Ньютона, являются удобным математическим аппаратом исследования динамики диспергирующих легкоподвижных сред. Указанные модели естественным образом учитывают наличие и взаимодействие эффектов нелинейности, дисперсии и диссипации. Уравнения этих моделей инвариантны относительно групп преобразований Галилея.
3. Модель газообразной самогравитирующей среды с ненулевым значением плотности ρ_0 на «бесконечности» позволяет определить характерную частоту $\omega_g = \sqrt{4\pi G\rho_0}$ (G – гравитационная постоянная) и характерный период $T_g = 1/\omega_g$ для нашей Метагалактики. При значении $\rho_0 = 0,5 \cdot 10^{-29}$ г/см³ величина T_g соответствует возрасту Метагалактики на сегодняшний момент ее истории.

ГЛАВА III. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

В этой главе демонстрируются точные стационарные решения одномерных систем гидродинамических уравнений диспергирующей среды для всех случаев, описанных в предыдущей главе.

§16. Эффекты микроструктурной дисперсии

Структура стационарных решений. Пусть уравнение (11.18) обладает стационарными решениями в системе координат (X, t) , где t – прежнее, $X = x - Ut$ и U – постоянная скорость движения новой системы координат относительно исходной. После перехода к переменным (X, t) и однократного интегрирования по X из (11.18) получим

$$\beta(u - U) \frac{d^2u}{dX^2} = \alpha \frac{du}{dX} - \epsilon \left(\frac{du}{dX} \right)^2 - \frac{u}{2}(u - 2U) + C \quad (16.1)$$

Здесь введено обозначение $\epsilon = \beta = l^2/6$, C – произвольная постоянная интегрирования, которую в силу граничного условия $u = u_x = u_{xx} = 0$ при $X \rightarrow \infty$ положим равной нулю. В дальнейшем анализе не будем ограничиваться случаем $\epsilon = \beta \geq 0$, а предположим, что ϵ – произвольная неотрицательная постоянная, а β – константа произвольного знака.

Вводя в качестве независимой переменной $v = u - U$, а в качестве зависимой переменной $p = dv/dX$, придем к одному уравнению первого порядка

$$\frac{dp}{dv} = \frac{\alpha p - \epsilon p^2 - (v^2 - U^2)/2}{\beta pv}, \quad (16.2)$$

Решения уравнения (16.2) симметричны относительно вертикальной оси $v = 0$ фазовой плоскости (v, p) и содержат на этой плоскости четыре особые точки с координатами

$$v_{1,2} = \pm U, \quad p_{1,2} = 0; \quad (16.3)$$

$$v_{3,4} = 0, \quad p_{3,4} = (\alpha \mp \sqrt{\alpha^2 + 2\epsilon U^2})/2\epsilon; \quad (16.4)$$

Исследуем характер особых точек (16.3) и (16.4) в зависимости от значений параметров α , β , U . Особые точки с координатами (16.3) имеют следующие собственные направления:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta U^2}}{2\beta v} \quad (16.5)$$

Значения $\lambda_{1,2}$ должны быть вычислены при $v = \pm U$ соответственно для каждой особенности.

Вблизи этих особых точек верно следующее асимптотическое соотношение

$$(p - \lambda_1(v \pm U))(p - \lambda_2(v \pm U)) = C_1,$$

где C_1 – произвольная постоянная.

Из (16.5) следует, что при $\beta > 0$, $\alpha^2 > 4\beta U^2$ особые точки с координатами (16.3) являются узлами. Точка с координатами $v=U$, $p=0$ (в дальнейшем будем обозначать ее цифрой 1) представляет собой узел с положительными собственными направлениями, а точка с координатами $v=-U$, $p=0$ (обозначим ее цифрой 2) – узел с отрицательными собственными направлениями. При $\alpha^2 = 4\beta U^2$ имеем в 1 и 2 вырожденные узлы с положительным и отрицательным собственным направлением соответственно. При $\alpha^2 < 4\beta U^2$ обе особенности типа фокуса; при $\alpha=0$ обе особенности типа центра. При $\beta < 0$ особые точки 1 и 2 при любых α и U являются седлами.

Особые точки с координатами (16.4) при $\beta > 0$ являются седлами, а при $\beta < 0$ – узлами с положительными собственными направлениями в точке 3 с координатами $v=0$, $p=p_3$ и отрицательными собственными направлениями в точке 4 с координатами $v=0$, $p=p_4$. Вблизи особых точек решение можно представить в следующем виде

$$p - p_{3,4} = C_2 v^k,$$

где C_2 – произвольная постоянная, а показатель степени k равен $\pm \sqrt{\alpha^2 + 2\beta U^2} / \beta p_{3,4}$.

Собственные направления особых точек (16.4) совпадают с направлениями координатных осей.

Фронты перехода. Качественная картина поведения интегральных кривых уравнения (16.2) на фазовой плоскости (v, p) для различных рассмотренных выше характерных случаев проиллюстрирована на рис. 16.1-16.4. Жирными сплошными линиями показаны сепаратрисы, проходящие через особые точки. Фронту перехода от $u=1$ при $X \rightarrow -\infty$ до $u=0$ при $X \rightarrow +\infty$ отвечает движение по сепаратрисе седла 3. На рисунках также приведены стационарные распределения скорости $u(X)$, соответствующие участкам сепаратрис. Скорость движения фронта перехода U одинакова во всех случаях и равна 0,5.

Рис. 16.1 соответствует случаю $\beta > 0$, $\alpha^2 > 4\beta U^2$, когда существует монотонное стационарное решение в виде фронта перехода от $u=1$ до $u=0$. Этому решению в фазовой плоскости отвечает участок сепаратрисы седла 3, соединяющий узловые особые точки 1 и 2. Значения коэффициентов следующие: $\beta=\epsilon=0,01$, $\alpha=0,1$.

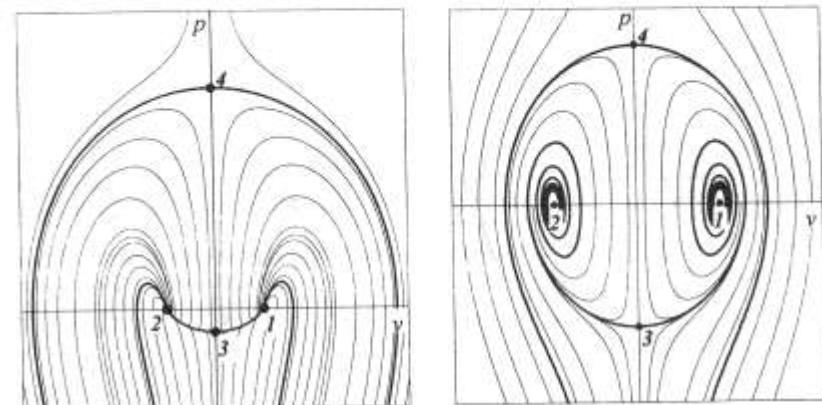


Рис. 16.1

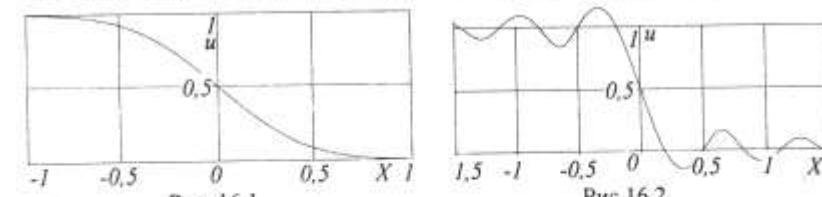


Рис. 16.2

При $\beta > 0$, $\alpha^2 < 4\beta U^2$ (рис. 16.2) получаем стационарное решение, которое содержит симметричные осцилляции, затухающие по мере удаления от основного фронта перехода, когда $X \rightarrow \pm\infty$ (особые точки 1 и 2 – фокусы). Интегральная кривая, реализующая переход от $u=1$ до $u=0$,

является сепаратрисой, проходящей через особую точку 3. Значения коэффициентов следующие: $\beta=\varepsilon=0,01$, $\alpha=0,01$.

На рис. 16.3 показаны интегральные кривые и стационарное распределение скорости для $\beta=\varepsilon=0,01$ и $\alpha=0$, когда особые точки 1 и 2 становятся центрами. В этом случае стационарное решение содержит незатухающие колебания, распространяющиеся по X в отрицательном и положительном направлении до бесконечности. При $X=0$ имеется переходный фронт, предусмотренный начальными условиями. На фазовой плоскости (v, p) этому фронту отвечает движение по сепаратрисе седла 3 от точки A до симметрично расположенной относительно начала координат точки B и далее при $X \rightarrow +\infty$ периодическое движение от точки B до точки 4, из точки 4 по другой сепаратрисе $v=0$ до точки 3, от точки 3 до точки 4 через точку B и т.д. При $X \rightarrow -\infty$ движение происходит по симметричной относительно оси p интегральной кривой.

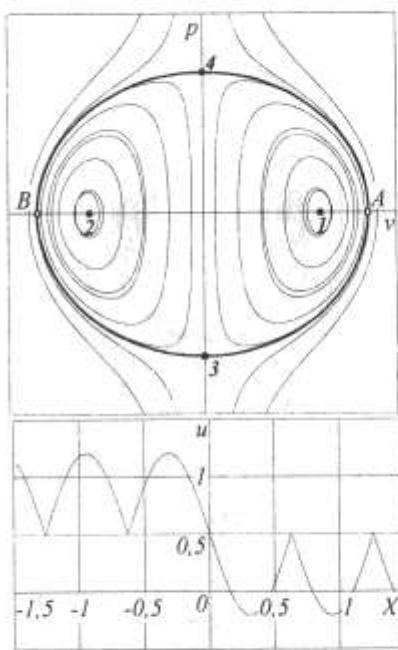


Рис. 16.3

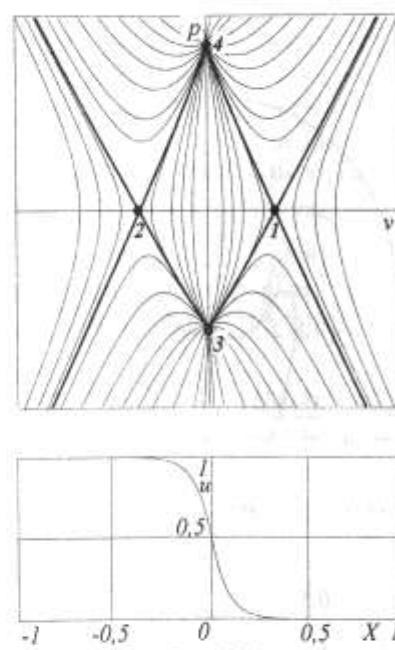


Рис. 16.4

В случае $\beta < 0$ (рис. 16.4) особые точки 1 и 2 – седла. Соответствующее решение является монотонной функцией и описывается инте-

гральной кривой, выходящей из седла 1 и входящей в седло 2 через узел 3. Значения коэффициентов следующие: $\beta=-0,01$, $\varepsilon=|\beta|/2$, $\alpha=0,01$.

§17. Плазменные волны

Структура стационарных решений. Пусть система уравнений (12.12) обладает стационарными решениями в системе координат (X, t) , где t – прежнее, $X = x - Ut$ и U – постоянная скорость движения новой системы координат относительно исходной. После перехода к переменным (X, t) и однократного интегрирования по X из (12.12) получим

$$\begin{aligned} n(u-U) &= C_1, \\ n(u-U)^2 &= -(c_i^2 + c_0^2)n + D^2 \left[(u-U) \frac{du}{dX} + \frac{c_i^2}{n} \frac{dn}{dx} \right] + \\ &\quad + \frac{D^2}{2c_0^2} \left((u-U) \frac{du}{dX} + \frac{c_i^2}{n} \frac{dn}{dx} \right)^2 + C_2. \end{aligned} \quad (17.1)$$

Предположим, что при $X \rightarrow \infty$ величина n стремится к своему невозмущенному значению 1, а скорость u стремится к нулю вместе со своими производными. Тогда $C_1 = -U$ и $C_2 = U^2 + c_i^2 + c_0^2$. Из системы (17.1), исключая n , придем к одному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\begin{aligned} D^2 \frac{(u-U)^2 - c_i^2}{u-U} \frac{d^2u}{dX^2} &= - \frac{u(c_i^2 + c_0^2 + U(u-U))}{u-U} - \\ &\quad - \frac{D^2}{(u-U)^2} \left((u-U)^2 + c_i^2 + \frac{(u-U)^2 - c_i^2}{2c_0^2} \right) \left(\frac{du}{dX} \right)^2, \end{aligned} \quad (17.2)$$

описывающему изменение скорости ионного газа.

Вводя в качестве независимой переменной $v = u - U$, а в качестве зависимой переменной $p = dv/dX$, получим одно уравнение первого порядка

$$\frac{dp}{dv} = - \frac{(c_i^2 + c_0^2 + Uv)(v+U)v + D^2 p^2(v^2 + c_i^2 + (v^2 - c_i^2)^2/2c_0^2)}{D^2(v^2 - c_i^2)p v}, \quad (17.3)$$

из которого легко получить линейное уравнение для функции $w(v) = D^2 p^2(v)$.

Картина интегральных кривых уравнения (17.3) на фазовой плоскости (v, p) симметрична относительно горизонтальной оси $p = 0$ и содержит на этой оси три особые точки с координатами

$$v_1 = 0, \quad p_1 = 0; \quad (17.4)$$

$$v_2 = -U, \quad p_2 = 0; \quad (17.5)$$

$$v_3 = -\frac{c_i^2 + c_0^2}{U}, \quad p_3 = 0. \quad (17.6)$$

Анализ показывает, что первая особая точка – вырожденный узел. Интегральные кривые в этой точке касаются вертикальной оси при $v \leq 0$.

Вторая особая точка – центр при $c_i^2 < U^2 < c_i^2 + c_0^2$ и седло при $U^2 < c_i^2$ или $U^2 > c_i^2 + c_0^2$. Во втором случае направления подхода сепаратрис к этой особой точке задаются угловыми коэффициентами

$$k_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{U^2 - (c_i^2 + c_0^2)}{D^2(U^2 - c_i^2)}}.$$

Вблизи второй особой точки верно следующее асимптотическое соотношение:

$$p^2 - a^2(v+U)^2 = C_1,$$

где $a^2 = (U^2 - (c_i^2 + c_0^2))/(D^2(U^2 - c_i^2))$, а C_1 – произвольная постоянная.

Третья особая точка – центр при $\sqrt{c_i^2 + c_0^2} < U < (c_i^2 + c_0^2)/c_i$ и седло при $U < \sqrt{c_i^2 + c_0^2}$ или $U > (c_i^2 + c_0^2)/c_i$. В случае седловой особой точки направления подхода сепаратрис к этой особой точке задаются угловыми коэффициентами

$$k_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{U^2(U^2 - (c_i^2 + c_0^2))}{D^2(U^2 c_i^2 - (c_i^2 + c_0^2)^2)}}.$$

Вблизи третьей особой точки верно следующее асимптотическое соотношение:

$$p^2 - b^2 \left(v + \frac{c_i^2 + c_0^2}{U} \right)^2 = C_2,$$

где $b^2 = U^2(U^2 - (c_i^2 + c_0^2))/(D^2(U^2 c_i^2 - (c_i^2 + c_0^2)^2))$, а C_2 – произвольная постоянная.

На фазовой плоскости могут существовать еще две особые точки с координатами

$$v_{4,4'} = -c_i, \quad p_{4,4'} = \pm \sqrt{\frac{(c_i^2 + c_0^2 - U c_i)(U - c_i)}{2 D^2 c_i}}. \quad (17.7)$$

При $c_i < U < (c_i^2 + c_0^2)/c_i$ это седловые особые точки. В остальных случаях они имеют мнимые значения ординат. Одной сепаратрисой является вертикальная прямая, другая имеет угловой коэффициент

$$k_{4,4'} = -\frac{(c_0^2 + (U + c_i)^2)}{6 D^2 c_i p_{4,4'}}.$$

Вблизи четвертой особой точки верна следующая асимптотическая формула:

$$(v + c_i)^2(p - (p_{4,4'} + k_{4,4'}(v + c_i))) = C_3,$$

где C_3 – произвольная постоянная.

Кроме того, уравнение (17.3) имеет особые точки с абсциссой $v = c_i$ и мнимой ординатой, которые мы рассматривать не будем.

Солитонные частицеподобные решения. Обобщая вышеизложенное, получим следующий фазовый портрет решений. На рис. 17.1 *a–e* представлена картина интегральных кривых на фазовой плоскости (v, p) при $D = 0,05$, $c_i = c_0 = 1$ и различных значениях параметра U .

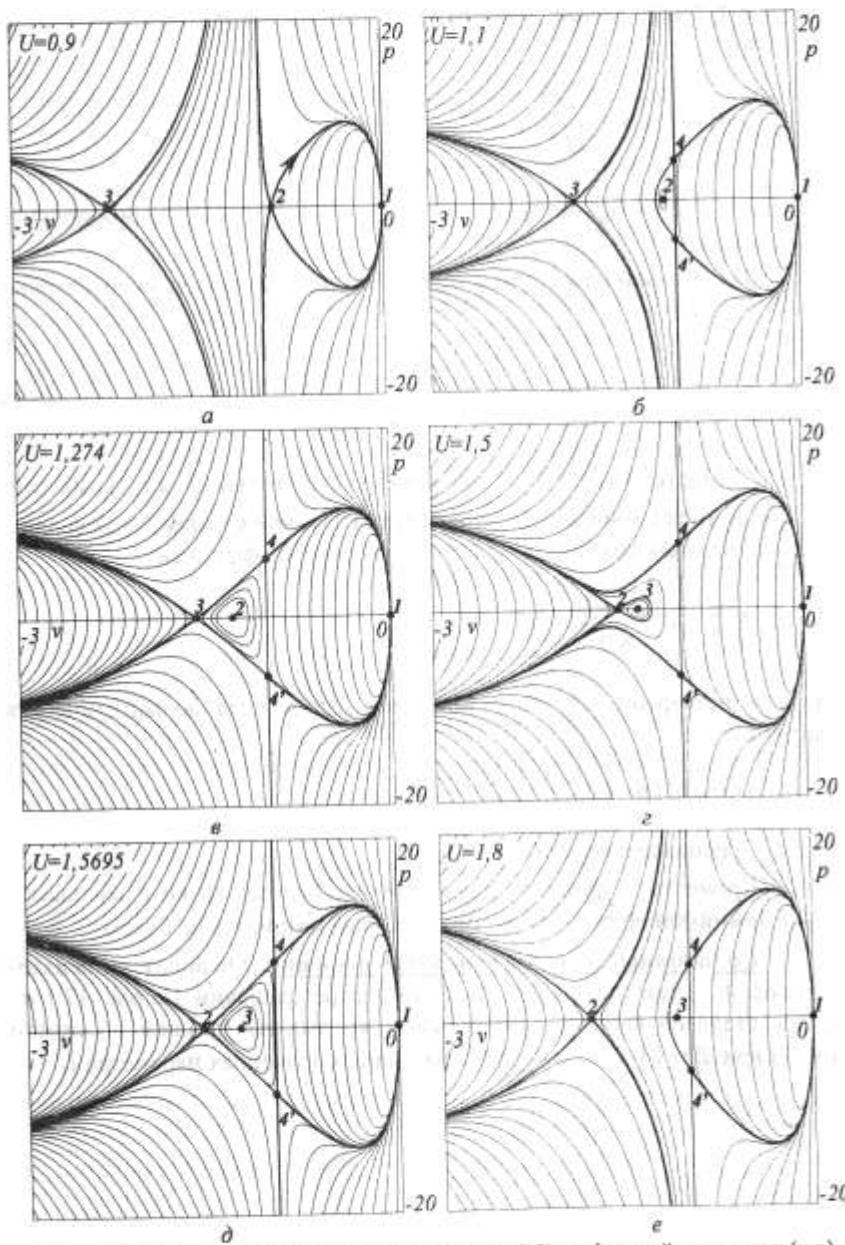


Рис. 17.1. Интегральные кривые уравнения (17.3) на фазовой плоскости (v, p).

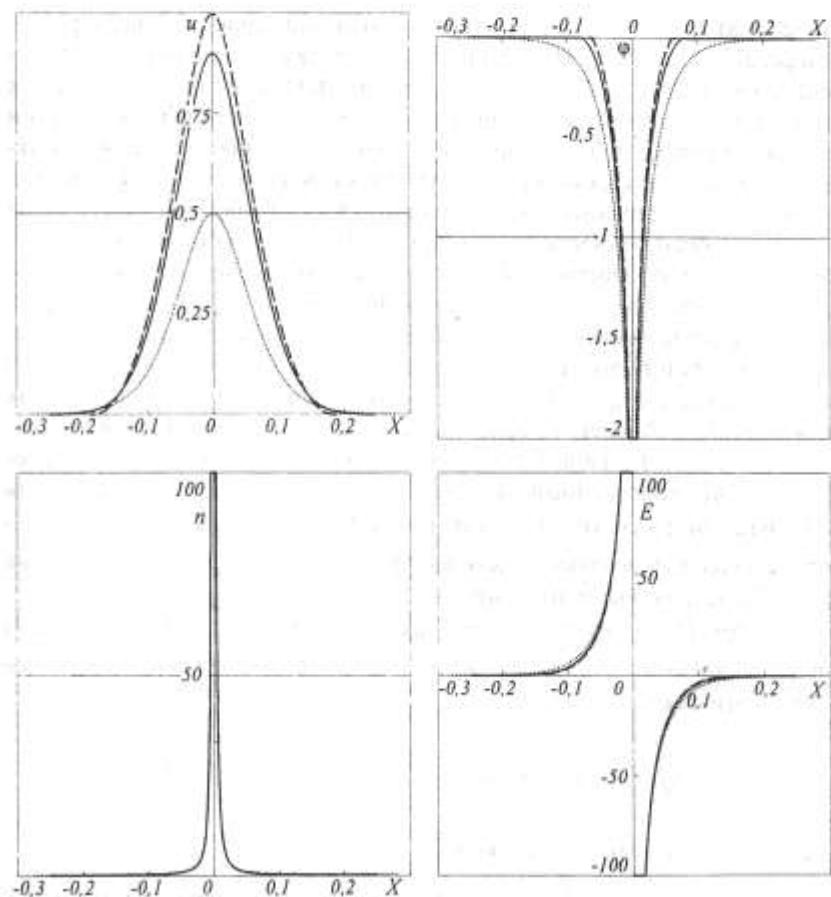


Рис. 17.2. Распределение скорости $u(X)$, концентрации ионов $n(X)$, потенциала $\phi(X)$ и напряженности $E(X)$ электрического поля в дозвуковых частицеподобных солитонах для разных значений U : $U=0.5$ – пунктирная линия, $U=0.9$ – сплошная линия, $U=1$ – штриховая линия.

Независимо от значений определяющих параметров U , c , и c_0 первая особая точка всегда является вырожденным узлом. При $U < c$, вторая и третья особые точки – седла, четвертая особая точка не существует (см. рис. 17.1, а, где $U=0.9$). Сепаратриса, исходящей из второй особой точки, отвечает решению в виде солитона с сосредоточенным в центре зарядом и массой – «частицеподобный солитон». Изменению

координаты X от $-\infty$ до $+\infty$ соответствует движение по сепаратрисе в направлении стрелки. Подчеркнем, что для таких стационарных решений рассматриваемой модели плазмы при приближении значения v к первой особой точке (17.4), когда $v \rightarrow 0$ ($X \rightarrow 0$), величина концентрации ионов стремится к бесконечности ($n \rightarrow \infty$), величина потенциала электрического поля стремится к минус бесконечности ($\phi \rightarrow -\infty$), а напряженность электрического поля стремится к плюс бесконечности слева и к минус бесконечности справа при $X \rightarrow 0$. Данное обстоятельство требует в рассматриваемой математической модели наличия компенсирующего отрицательного заряда на поверхности $X=0$. На рис. 17.2 представлены распределения $u(X)$, $n(X)$, $\phi(X)$, $E(X)$, отвечающие рассматриваемому солитонному частицеподобному решению. Описанное решение можно интерпретировать одновременно как частицу в точке $X=0$ и как связанную с ней волну (в области, где величина скорости u заметно отлична от нуля). Подобные решения подробно проанализированы в работах [26-28]. Аналогичный характер имеет солитонное решение вплоть до звуковой скорости движения, когда $U = c_i$. Соответствующие распределения для звукового частицеподобного солитона представлены на рис. 17.2 штриховыми линиями.

При $U = c_i$ вторая и четвертая особые точки совпадают, образуя вырожденную особую точку, вблизи которой справедливо следующее асимптотическое решение

$$p^2 = \frac{c_0^2}{D^2 c_i} (v + c_i) + C_4,$$

где C_4 – произвольная постоянная.

При $c_i < U < \sqrt{c_i^2 + c_0^2}$ вторая особая точка – центр, а третья и четвертая – седла. На рис. 17.1, б показана картина интегральных кривых на фазовой плоскости при $U = 1,1$. Отметим, что существует такое значение скорости $U = 1,274$, при котором сепаратриса, выходящая из третьей особой точки, проходит через четвертую особую точку (рис. 17.1, в). При $U = \sqrt{c_i^2 + c_0^2}$ вторая и третья особые точки совпадают, образуя вырожденную особую точку, четвертая особая точка – седло.

Сверхзвуковые солитоны. При $\sqrt{c_i^2 + c_0^2} < U < (c_i^2 + c_0^2)/c_i$ вторая и четвертая особые точки – седла, третья особая точка – центр. В этом диапазоне параметра U мы специально выделим два случая. В

первом случае, когда $\sqrt{c_i^2 + c_0^2} < U < U_*$, картина интегральных кривых на фазовой плоскости показана для $U = 1,5$ на рис. 17.1, г. Здесь сепаратриса, исходящая из второй особой точки и возвращающаяся в нее, дает решение в виде изолированного солитона, движущегося со сверхзвуковой скоростью $U > \sqrt{c_i^2 + c_0^2} > c_i$. Максимально достижимые значения скорости u в таких солитонах ограничены сверху величиной

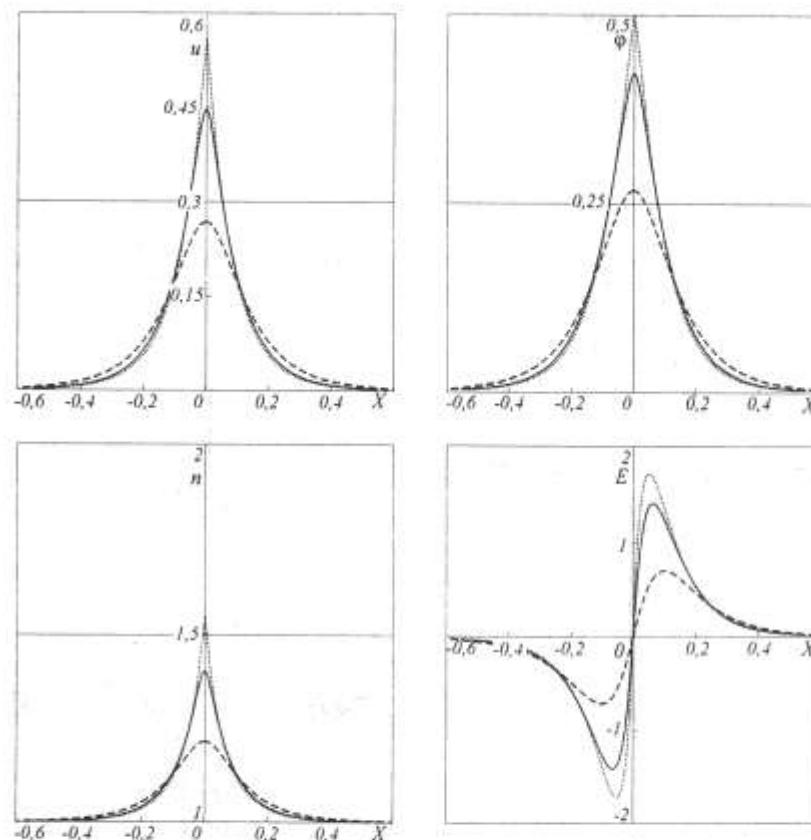


Рис. 17.3. Распределение скорости $u(X)$, концентрации ионов $n(X)$, потенциала $\phi(X)$ и напряженности $E(X)$ электрического поля в сверхзвуковых солитонах для разных значений U : $U=1,5$ – штриховая линия, $U=1,55$ – сплошная линия, $U=1,569$ – пунктирная линия.

$U - c_i$ ($v < -c_i$), а максимальные значения концентрации ионов в солитонах не могут превысить величины $n_0 U / c_i$. Отметим важную особенность таких солитонов: солитоны большей амплитуды распространяются с большей скоростью. На рис. 17.3 приведены профили скорости и концентрации частиц, а также потенциала и напряженности электрического поля в таких изолированных солитонах для $U = 1,5$, $U = 1,55$ и $U = 1,569$. Физическим явлениям, которые могут соответствовать данным солитонам, посвящен § 27.

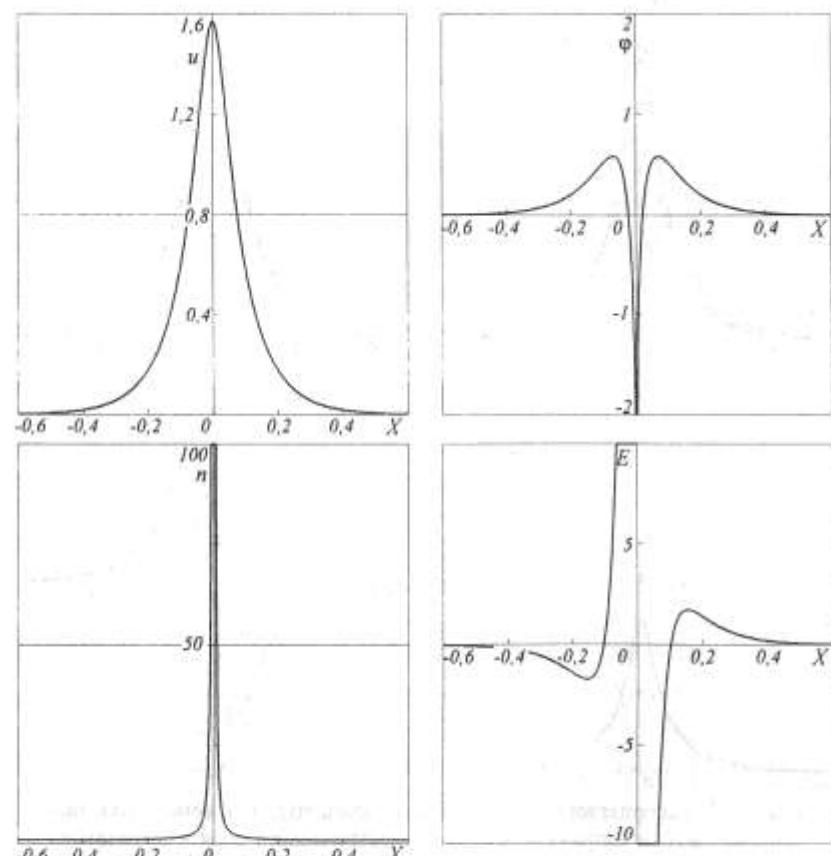


Рис. 17.4. Распределение скорости $u(X)$, концентрации ионов $n(X)$, потенциала $\phi(X)$ и напряженности $E(X)$ электрического поля в сверхзвуковом частицеподобном солитоне при $U = 1,5695$.

Существует такое значение скорости $U = U_* \approx 1,5695$, при котором сепаратриса, выходящая из второй особой точки, проходит через четвертую и первую особые точки (рис. 17.1,д). Решение, отвечающее данной сепаратрисе, представляет собой изолированный частицеподобный солитон с сосредоточенными в центре зарядом и массой, который распространяется со сверхкритической скоростью. На рис. 17.4 показано распределение скорости и концентрации частиц в таком солитоне. Важной особенностью этого решения является изоэнтропическое (бесскакковое) торможение сжимаемой газообразной среды от сверхзвукового значения с плавным переходом через значение критической скорости c_s (особая точка 4) до нулевого значения (особая точка 1) скорости.

При $U_* < U < (c_i^2 + c_0^2)/c$ фазовый портрет решений представлен на рис. 17.1,е, где $U = 1,8$.

При $U = (c_i^2 + c_0^2)/c$, третья и четвертая особые точки совпадают, образуя вырожденную особенность, вторая особая точка – седло. При $U > (c_i^2 + c_0^2)/c$, вторая и третья особые точки – седла, четвертая особая точка не существует.

§18. Солитоны в замагниченной плазме

Структура стационарных решений. Выбирая в качестве независимой переменной величину n , а в качестве зависимой переменной $p = dn/d\xi$ из (13.3), получим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dp}{dn} = \frac{n-1+k_z^2(n-1)n/U^2+(1-3U^2/n^2)p^2/n^2}{(1-U^2/n^2)p/n}, \quad (18.1)$$

из которого легко получить линейное уравнение для функции $w(n) = p^2(n)$.

Картина интегральных кривых уравнения (18.1) на фазовой плоскости (n, p) симметрична относительно горизонтальной оси $p = 0$ и содержит на этой оси две особые точки с координатами

$$n_1 = 1, \quad p_1 = 0; \quad (18.2)$$

$$n_2 = U^2 / k_z^2, \quad p_2 = 0; \quad (18.3)$$

На фазовой плоскости существуют еще две особые точки с координатами

$$n_{3,y} = U, \quad p_{3,y} = \pm(U(1-U)(k_z^2 - U)/2)^{1/2}. \quad (18.4)$$

Анализ показывает, что первая особая точка – седло при $k_z < U < 1$ и центр при $U < k_z$ или $U > 1$ (для положительных значений скорости U). В первом случае направления подхода сепаратрис к этой особой точке задаются угловыми коэффициентами

$$k_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{U^2 - k_z^2}{U^2(1-U^2)}}.$$

Вблизи первой особой точки верно следующее асимптотическое соотношение:

$$p^2 - a^2(n-1)^2 = C_1,$$

где $a^2 = (U^2 - k_z^2)/(U^2(1-U^2))$, а C_1 – произвольная постоянная.

Вторая особая точка – седло при $k_z^2 < U < k_z$ и центр при $U < k_z^2$ или $U > k_z$ (для положительных значений скорости U). В первом случае направления подхода сепаратрис к этой особой точке задаются угловыми коэффициентами

$$k_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{U^2(k_z^2 - U^2)}{(U^2 - k_z^4)k_z^2}}.$$

Вблизи второй особой точки верно следующее асимптотическое соотношение:

$$p^2 - b^2(n-U^2/k_z^2)^2 = C_2,$$

где $b^2 = (k_z^2 - U^2)U^2/((U^2 - k_z^4)k_z^2)$, а C_2 – произвольная постоянная.

Особые точки с координатами (18.4) являются седлами при $U < k_z^2$ и при $U > 1$. В остальных случаях они имеют мнимые значения ординат. Одной сепаратрисой является вертикальная прямая $n=U$, другая имеет угловой коэффициент

$$k_{3,3'} = \frac{U^2 + k_z^2(1-2U)}{6p_{3,3'}}.$$

Вблизи третьей особой точки верна следующая асимптотическая формула:

$$(n-U)^2(p - (p_{3,3'} + k_{3,3'}(n-U))) = C_3,$$

где C_3 – произвольная постоянная.

Ионно-звуковые солитоны. Интересующие нас солитонные решения, удовлетворяющие при $\xi \rightarrow \infty$ условиям $n \rightarrow 1$, u , v , $w \rightarrow 0$, можно построить только в том случае, когда $k_z < U < 1$.

На рис. 18.1 приведены интегральные кривые на фазовой плоскости (n, p) для случая $U = 0.8$, $k_z = 0.6$. Сепаратрисы, проходящие через седловую особую точку I выделены жирными линиями. При изменении координаты ξ от $-\infty$ до $+\infty$ движение по сепаратрисе на фазовой плоскости происходит в направлении стрелки. Амплитуда солитона дается отрезком оси абсцисс между особой точкой I и другой точкой пересечения сепаратрисы с той же осью. Амплитуда солитона растет с увеличением координаты второй особой точки $n_2 = U^2 / k_z^2$.

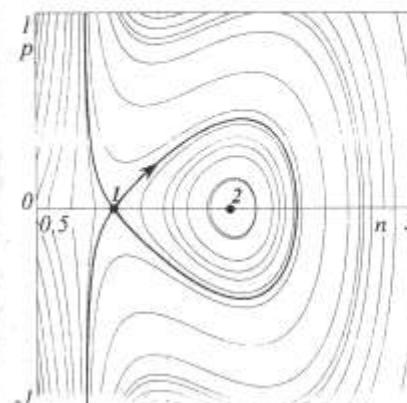


Рис. 18.1. Интегральные кривые уравнения (18.1) на фазовой плоскости (n, p) при $U=0.8$, $k_z=0.6$.

На рис. 18.2 приведены распределения плотности $n(\xi)$ и компонент скорости $u(\xi)$, $v(\xi)$ и $w(\xi)$ для трех пар значений параметров $U = 0.8$, $k_z = 0.6$; $U = 0.9$, $k_z = 0.6$ и $U = 0.8$, $k_z = 0.7$ (соответственно сплошная, штриховая и пунктирная линии). Здесь следует подчеркнуть, что только одна компонента скорости в направлении, совпадающем с направлением магнитного поля, а именно w , всюду в солитоне является положительной величиной, причем ее максимальное значение может превышать значение U . Это обстоятельство связано с отрицательностью значений компоненты скорости u в окрестности вершины солитона.

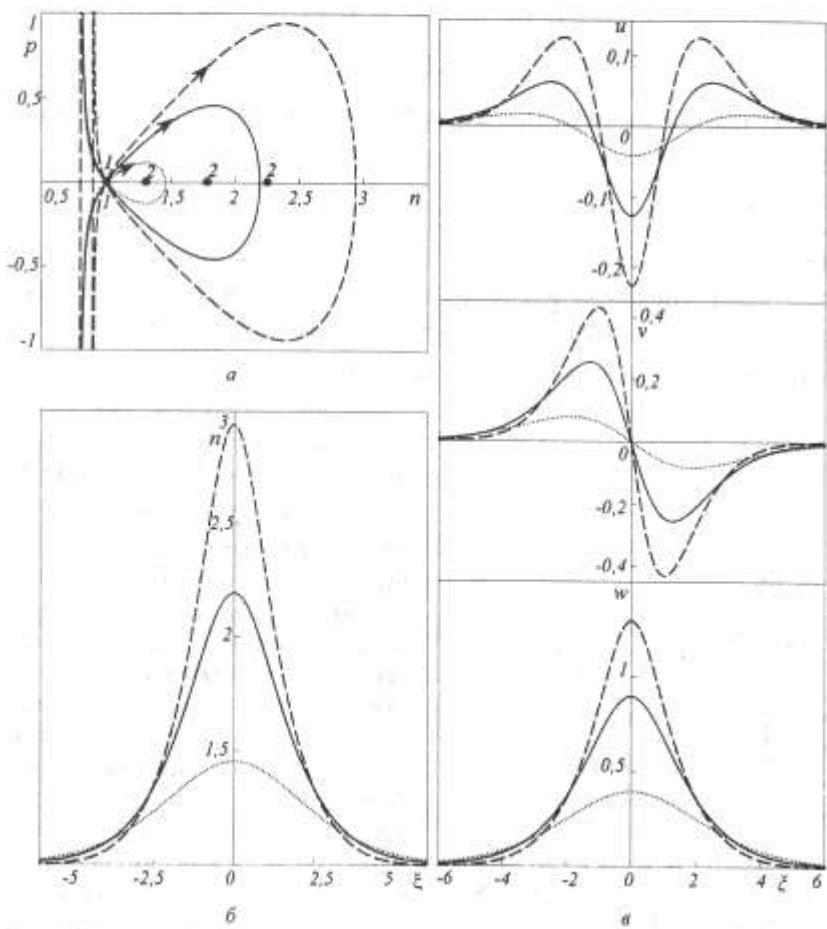


Рис. 18.2. а – сепаратрисы, проходящие через седловую особую точку (18.2) уравнения (18.1); б – распределения плотности $n(\xi)$; в – распределения компонент скорости $u(\xi)$, $v(\xi)$ и $w(\xi)$ для различных значений параметров: $U=0.8$, $k_z=0.6$ – сплошная линия, $U=0.9$, $k_z=0.6$ – штриховая линия, $U=0.8$, $k_z=0.7$ – пунктирная линия.

Отметим также, что в то время как $n(\xi)$, $u(\xi)$ и $w(\xi)$ являются четными функциями своего аргумента, $v(\xi)$ обязана быть нечетной функцией. Последнее свойство непосредственно следует из первого и третьего уравнений системы (13.1) для рассматриваемого случая стационарных плоских решений. Из сопоставления сплошных и штриховых кривых на

рис. 18.2 можно делать выводы об изменении структуры солитонных решений в зависимости от изменения параметра U при постоянном k_z , а из сравнения сплошных и пунктирных кривых – о влиянии на структуру солитона изменения величины k_z при $U=\text{const}$.

Другие возможные решения. При $k_z^2 < U < k_z < 1$ первая особая точка с координатами (18.2) является центром, вторая особая точка с координатами (18.3) – седлом, особые точки с координатами (18.4) остаются минимыми. Соответствующие решения на фазовой плоскости представляются замкнутыми интегральными кривыми, охватывающими особую точку 1 (рис. 18.3). При этом можно построить периодическое решение в форме кноидальной волны, распространяющейся до бесконечности.

При выполнении условий $U < k_z^2 < k_z < 1$ обе особые точки 1 и 2 становятся центрами. В фазовой плоскости на прямой $n=U$, расположенной левее точек 1 и 2, дополнительно появляются особые точки 3 и 3' с координатами (18.4).

В сверхзвуковом случае, когда $k_z < 1 < U$, фазовая плоскость также содержит все четыре особые точки: две первые – типа центра, две другие – типа седла. Прямая $n=U$ находится между первой и второй особыми точками.

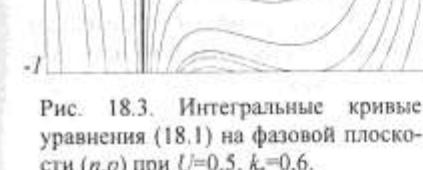


Рис. 18.3. Интегральные кривые уравнения (18.1) на фазовой плоскости (n, p) при $U=0.5$, $k_z=0.6$.

Кроме периодической кноидальной волны, которой опять же соответствуют замкнутые интегральные кривые, охватывающие особую точку 1, в этом случае можно построить решение в виде фронта перехода (ударной волны) с незатухающими осцилляциями, распространяющимися вдоль координаты ξ к $\pm\infty$. Такое стационарное решение получится в пределе $t \rightarrow \infty$ при интегрировании исходной системы уравнений (13.1) и (13.2) с начальными данными в виде «ступенек» (в частности, когда n меняется скачком от 1 до U^2/k_z^2). Аналогичная последнему случаю картина интегральных кривых и соответствующие стационарные решения были исследованы в [23] для одного квазилинейного уравнения третьего порядка.

§19. Гравитационное воздействие

Структура стационарных решений. В одномерном случае система уравнений движения гравитирующего газа (14.4)-(14.5) имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + F_x, \\ \frac{\partial F_x}{\partial x} &= b^2(1-\rho) \end{aligned} \quad (19.1)$$

Здесь введены следующие обозначения: $c^2 = \gamma p / \rho$ – скорость звука (скорость распространения малых возмущений), $b^2 = 4\pi G \rho_0 / u_0^2$, u_0 – характерная скорость. Все величины в (19.1) считаются безразмерными, причем плотность газа отнесена к своему невозмущенному значению ρ_0 , скорость – к u_0 , скорость звука к $\sqrt{\gamma} u_0$, координата – к характерному размеру l_0 , время к $-l_0/u_0$.

Пусть система уравнений (19.1) обладает стационарными решениями в системе координат (X, t) , где t – прежнее, $X = x - Ut$ и U – постоянная скорость движения новой системы координат относительно исходной. После перехода к переменным (X, t) и однократного интегрирования по X первого уравнения из (19.1) получим

$$\begin{aligned} \rho(u - U) &= A, \\ (u - U) &= -\frac{c^2}{\rho} \frac{dp}{dx} + F_x, \\ \frac{dF_x}{dX} &= b^2(1-\rho) \end{aligned} \quad (19.2)$$

Постоянную A , имеющую смысл величины расхода газа, будем считать отличной от нуля.

Продифференцируем второе уравнение системы (19.2) по X и исключим из полученного соотношения величину плотности $\rho = A/(u - U)$ и силы F_x с помощью третьего уравнения системы (19.2). Вводя в качестве независимой переменной величину $v = u - U$, а в ка-

честве зависимой переменной $p = dv/dX$, придем к одному уравнению первого порядка

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{p^2(v^2 + c^2) - b_2^2(v - A)v}{(v^2 - c^2)p v}. \quad (19.3)$$

Будем рассматривать только положительные значения расхода A и, соответственно, скорости v . Картина интегральных кривых уравнения (19.3) на фазовой плоскости (v, p) симметрична относительно горизонтальной оси $p = 0$ и содержит на этой оси три особые точки с координатами

$$v_1 = 0, \quad p_1 = 0; \quad (19.4)$$

$$v_2 = A, \quad p_2 = 0; \quad (19.5)$$

$$v_{3,4} = c, \quad p_{3,4} = \pm b \sqrt{\frac{c-A}{2c}}. \quad (19.6)$$

Анализ показывает, что первая особая точка – вырожденный узел. Интегральные кривые при $v \geq 0$ входят в эту точку, касаясь вертикальной оси.

Вторая особая точка является центром при $A < c$ и седлом при $A > c$. Во втором случае угловые коэффициенты собственных направлений задаются формулами

$$k_{1,2} = \pm \frac{b_2}{\sqrt{A^2 - c^2}}. \quad (19.7)$$

Вблизи этой особой точки справедливы следующие асимптотические формулы:
для $A < c$

$$\begin{aligned} p^2 &= C \exp[-C_1(v - A)] - C_2 [C_1(v - A) - 1] \\ C_1 &= \frac{A^2 + c^2}{2A(A^2 - c^2)}, \quad C_2 = \frac{b_2 A^2 (A^2 - c^2)}{A^2 + c^2}, \quad C = \text{const}, \end{aligned}$$

для $A > c$

$$p^2 = \frac{b_2^2}{a^2 - c^2} (v - A)^2.$$

Третья и четвертая особые точки представляют собой седла при $A < c$ или имеют мнимые ординаты. Движение к особым точкам осуществляется по вертикальной сепаратрисе $v=c$. Выход из особых точек происходит по сепаратрисе с угловым коэффициентом

$$k_{3,4} = \pm \frac{b_2}{6c^3} \sqrt{\frac{2c}{c-A}}.$$

Периодические волны. На рис. 19.1 представлена картина интегральных кривых на фазовой плоскости (v,p) для малого значения величины расхода газа $A=10^{-4}$.

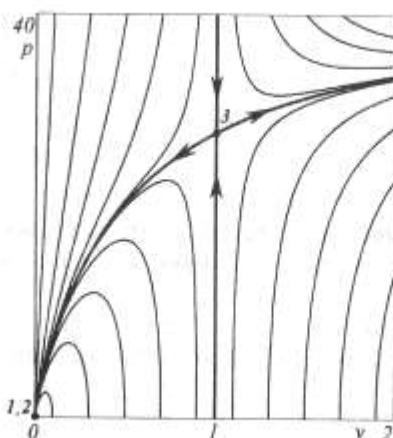


Рис. 19.1. Интегральные кривые уравнения (19.3) на фазовой плоскости (v,p) при малом значении величины расхода газа $A=10^{-4}$

Движение по одной из замкнутых интегральных кривых вокруг второй особой точки типа центра дает решение в форме периодической кноидальной волны. В качестве примера на рис. 19.2 представлено распределение плотности ρ и скорости u в зависимости от координаты X .

Указанное решение может быть получено для сколь угодно малого значения параметра A , что позволяет предположить возможность существования при $A=0$ периодического решения с сосредоточенными массами на поверхностях, проходящих через точки максимумов кноидальной волны.

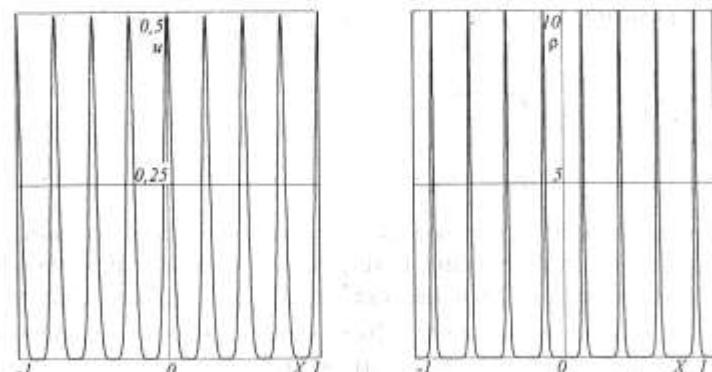


Рис. 19.2. Распределение скорости $u(X)$ и плотности $\rho(X)$ в периодической кноидальной волне.

§20. Инвариантные солитоны

Структура стационарных решений. Будем рассматривать стационарные решения уравнения (15.4), распространяющиеся с постоянной скоростью U , и перейдем в систему координат (X, t) , где t – прежнее, $X = x - Ut$. После преобразований, аналогичных проделанным в § 16, придем к уравнению

$$\frac{dp}{dv} = \frac{\beta p^2 + v^2 - U^2}{\beta p v}. \quad (20.1)$$

Отметим, что уравнение (20.1) можно получить из уравнения (16.2), заменив знак β на противоположный и положив $\alpha=0, \epsilon=\beta/2$.

Как следует из (20.1) на фазовой плоскости (v, p) картина интегральных кривых симметрична как относительно вертикальной оси $v=0$, так и относительно горизонтальной оси $p=0$. Указанная симметрия решений обусловлена появлением в знаменателе правой части (20.1) множителя v и является следствием свойств инвариантности уравнения (15.4) относительно группы преобразований Галилея. Симметрия относительно оси $p=0$ есть следствие конкретной формы записи члена βp^2 в числителе правой части (20.1), появляющегося из-за наличия в исходных уравнениях слагаемых типа «квадратичной вязкости».

Уравнение (20.1) имеет две пары особых точек с координатами (см. §16)

$$v_{1,2} = \pm U, \quad p_{1,2} = 0; \quad (20.2)$$

$$v_{3,4} = 0, \quad p_{3,4} = \mp U/\sqrt{\beta}, \quad (20.3)$$

первые две из которых являются седловыми особыми точками, а последние две – узлами. Картина интегральных кривых уравнения (20.1) в фазовой плоскости (v, p) приведена на рис. 20.1. Особые точки пронумерованы в соответствии с (20.2-20.3). Сепаратрисы, проходящие через седловые особые точки, показаны на рисунке жирными прямыми. Штриховой линией приведена изоклина нулевых углов наклона интегральных кривых, определяемая уравнением эллипса $v^2 + \beta p^2 = U^2$. При $\beta \rightarrow 0$ две особые точки на оси p уходят, соответственно, в $\mp\infty$.

Солитоны. Проанализируем подробно решения в виде уединенных волн-солитонов, движущихся по нулевому «фону». Этим решениям в фазовой плоскости на рис. 20.1 отвечают: если $u > 0$ и $U > 0$ отрезок сепаратрисы, соединяющей седловую особую точку 2 с узлом 4 (или если $u < 0$ и $U < 0$ отрезок сепаратрисы от седла 1 до узла 3); далее от узла 4 до узла 3 идем по любой интегральной кривой, пересекающей ось абсцисс при $0 < v < U$ (или от узла 3 до узла 4 по любой интегральной кривой, пересекающей ось абсцисс при $U < v < 0$); последние участки решения также представляются отрезком сепаратрисы, соединяющим узел 3 с седлом 2 (или отрезком сепаратрисы, соединяющим узел 4 с седлом 1). На рис. 20.2 представлено стационарное решение $u(X)$ типа солитона с амплитудой, равной единице, и скоростью распространения $U=0,67$, рассчитанное при значении $\beta=0,001$. На распределении $u(X)$ узлам 3 и 4 фазовой плоскости отвечают точки с соответствующей нумерацией, а седлу 2 отвечает $X \rightarrow \mp\infty$.

Уравнение (20.1) имеет решение ($v \neq 0$)

$$\beta p^2 = v^2 - 2Cv + U^2, \quad (20.4)$$

где C – постоянная интегрирования. Уравнение (20.4) можно трактовать как интеграл энергии

$$\frac{\beta p^2}{2} + P(v) = 0.$$

Здесь первое слагаемое отождествляется с кинетической энергией материальной точки массы β , а второе слагаемое – с ее потенциальной энергией

$$P(v) = -\frac{v^2}{2} + Cv - \frac{U^2}{2}. \quad (20.5)$$

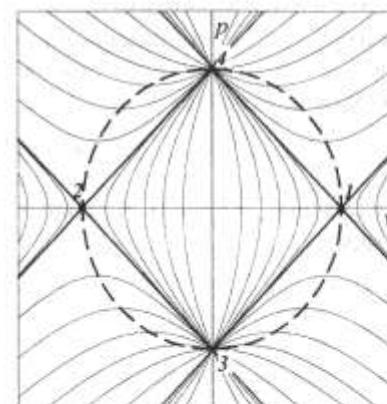


Рис. 20.1. Интегральные кривые уравнения (20.1) на фазовой плоскости (v, p) .

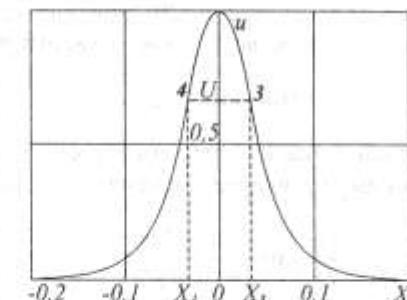


Рис. 20.2. Распределение скорости $u(X)$ в солитоне с амплитудой, равной единице, и скоростью распространения $U=0,67$ при значении $\beta=0,001$.

Приведем также аналитические выражения для рассматриваемых солитонных решений при $u > 0$ и $U > 0$, которые следуют из (20.4) и (20.5). Для вершины солитона при $X_1 \leq X \leq X_2$ получаем выражение

$$u = U + C - \sqrt{C^2 - U^2} \operatorname{ch}(X/\sqrt{\beta}), \quad (20.6)$$

для его левой ветви при $-\infty < X < X_1$

$$u = U \exp[(X - X_1)/\sqrt{\beta}] \quad (20.7)$$

и, наконец, для его правой ветви при $X_2 < X < \infty$

$$u = U \exp[(X_2 - X)/\sqrt{\beta}]. \quad (20.8)$$

Подчеркнем, что инвариантное уравнение (15.4) имеет бесконечное число солитонных решений, движущихся с одной скоростью U и

отличающихся своими вершинами (20.6), соответствующим разным C . Аналогично можно рассмотреть другое семейство солитонов при $u < 0$ и $U < 0$, для которых седло I отвечает $X \rightarrow \pm\infty$.

Решения типа (20.7) и (20.8) являются весьма распространенными в различных задачах теории нелинейных уединенных волн. Укажем, например, аналогичные решения, приведенные в статье [145] и описывающие движущиеся доменные стенки в одноосных ферромагнетиках.

Задача о распаде начального сжатия. Приведем численные результаты из статьи [29] решения задачи о распаде начального сжатия, когда в качестве начальных данных задано распределение

$$u(x,0) = 6 \operatorname{ch}^{-2} x, \quad (20.9)$$

отвечающее симметричному начальному сжатию. Для таких начальных данных уравнение Кортевега – де Вриза вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (20.10)$$

имеет при $\beta=1$ точное решение

$$u(x,t) = 12 \frac{3 + 4 \operatorname{ch}(2x - 8t) + \operatorname{ch}(4x - 64t)}{[3 \operatorname{ch}(x - 28t) + \operatorname{ch}(3x - 36t)]^2}, \quad (20.11)$$

представляющее два солитона с величиной амплитуд 8 и 2 и скоростями движения 16 и 4.

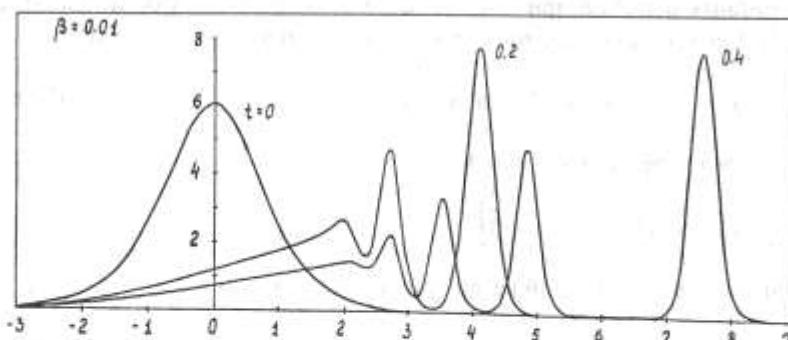


Рис. 20.3. Результаты численного решения уравнения (15.4) с коэффициентом 6 при нелинейном слагаемом uu , для $\beta=0,01$ в моменты времени $t=0, 0.2$ и 0.4 .

На рис. 20.3 представлены результаты решения уравнения (15.4) с коэффициентом 6 при нелинейном слагаемом uu , для $\beta=0,01$ в моменты времени $t=0, 0.2$ и 0.4 . Отметим образование в результате такого распада нескольких солитонов, скорость которых пропорциональна величине их амплитуды, а форма с течением времени перестает изменяться.

Выводы

1. Уравнения гидродинамической модели с микроструктурной дисперсией обладают классом стационарных решений в виде волнового фронта. Характерной особенностью этих решений является переход от монотонной структуры к осциллирующей при уменьшении коэффициента диссипации (вязкости). При этом точка перехода определяется из качественного анализа особых точек реализующегося стационарного решения.
2. Уравнения движения диспергирующей среды с собственным электрическим взаимодействием имеют важный класс стационарных решений в форме классических и частицеподобных солитонов, которые могут иметь докритические и сверхкритические скорости распространения. Определенный интерес могут представлять также периодические кноидальные волны, которые при малых амплитудах вырождаются в обычные синусоидальные волны.
3. Уравнения движения диспергирующей замагниченной среды (плазмы) обладают классами докритических солитонных решений и периодических решений в виде кноидальных волн.
4. Уравнения движения гравитирующей газообразной среды при ненулевом значении плотности и потока на бесконечности имеют стационарные периодические решения типа слоистой структуры. Эти уравнения допускают также стационарные непрерывные решения с переходом через значение критической скорости.
5. Инвариантное относительно группы преобразований Галилея квазилинейное уравнение третьего порядка обладает интересным классом стационарных решений в форме солитонов. Решение задачи о распаде начального сжатия в рамках этого уравнения приводит к последовательности солитонных решений с уменьшающейся амплитудой и скоростью распространения.

ГЛАВА IV. ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ МОДЕЛИ

Важную информацию о многих физических явлениях можно получить из упрощенных моделей теоретической физики. Здесь большую роль играют линеаризованные модели для слабовозмущенных процессов, либо модели, использующие специальные переменные (например, комплексные, характеристические и т.п.).

В настоящей главе на основе аналогии между комплексными и характеристическими («гиперболическими») переменными и функциями от них получены весьма информативные модели. Введение в рассмотрение гиперболических переменных (§21) и их функций (§22) позволяет получить соответствующие условия дифференцируемости, аналогичные условиям Коши – Римана для аналитических функций комплексного переменного. Преобразования неортогонального вращения в плоскости гиперболических чисел (§21) приводят не только к традиционным «докритическим» преобразованиям Лоренца (или правилу подобия Прандтля – Глаузтра в гидродинамике), но также и к «сверхкритическим» преобразованиям Лоренца (или правилу подобия Акерретта в гидродинамике). Отметим, что возможность обобщения преобразований Лоренца на область сверхсветовых скоростей изучалась в работах [146, 147].

§21. Гиперболические числа на плоскости

Сверхкритические числа. Пусть в изучаемой области пространства зарегистрирована постоянная скорость распространения сигнала $c > 0$ (скорость звука или скорость света). Наличие характерной скорости c позволяет в случае двух независимых переменных – одной пространственной координаты x и времени t – ввести «зависимые» переменные

$$z = x + ct, \quad z^* = x - ct. \quad (21.1)$$

Эти переменные «следят» за волнами (возмущениями), распространяющимися со скоростью c в отрицательном и положительном направлениях оси x . Назовем z и z^* сопряженными гиперболическими числами (аргументами).

Здесь и далее широко будем использовать очевидную аналогию с комплексными числами

$$z = x + iy, \quad z^* = x - iy,$$

устанавливаемую путем замены c на i и t на y .

Модулю ρ и аргументу ϕ комплексного числа z , определяемых соотношениями

$$\rho^2 = z \cdot z^* = x^2 + y^2, \quad \phi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x},$$

соответствует модуль ρ и аргумент ϕ гиперболического числа z

$$\rho^2 = z \cdot z^* = x^2 - c^2 t^2, \quad \phi = \operatorname{arcth} \frac{ct}{x}, \quad (21.2)$$

тригонометрической форме записи комплексного числа

$$z = \rho(\cos \phi + i \sin \phi)$$

соответствует «тригонометрическая» форма записи гиперболического числа (через гиперболические косинус и синус)

$$z = \rho(\operatorname{ch} \phi + i \operatorname{sh} \phi). \quad (21.3)$$

В (21.2) и (21.3)

$$\operatorname{ch} \phi = \frac{x}{\rho}, \quad \operatorname{sh} \phi = \frac{ct}{\rho}, \quad \phi = \ln \sqrt{\frac{x+ct}{x-ct}}.$$

Введем переменную $V = x/t$ с размерностью скорости и безразмерное «число Маха» $M = V/c$. Числа (21.1) можно записать в виде

$$z = ct(M+1), \quad z^* = ct(M-1),$$

модуль и аргумент в виде

$$\rho = ct\sqrt{M^2 - 1}, \quad \phi = \ln \sqrt{\frac{M+1}{M-1}}.$$

На рис. 7.1 приведена плоскость гиперболических чисел с графиками гипербол $\rho^2 = x^2 - c^2 t^2$ при $\rho=1$ и $c=1$ (кривые 1 и 2). Показана также окружность $\rho^2 = x^2 + y^2$ ($y=t$). Величина ρ характеризует расстояние (интервал) между началом координат ($x=0, y=t=0$) и точками окружности или «гиперболическое» расстояние (интервал) между нача-

лом координат и точками гипербол I и 2. Угол ϕ отсчитывается от горизонтальной оси x .

Докритические числа. Подчеркнем следующую важную особенность гиперболических чисел (21.1). Для них величины модуля ρ и аргумента ϕ (21.2) являются действительными при $|M| \geq 1$, когда $|V| \geq c$. Если параметр V характеризует скорость движения материальной точки, то области правого I и левого II квадранта (между биссектрисами $V = \pm c$) отвечают областям «сверхкритических» скоростей. При $|V| < c$ величины модуля и аргумента становятся мнимыми. Для возможности рассмотрения «докритических» областей скорости (при действительных ρ и ϕ) следует ввести гиперболические числа по формулам

$$z = ct + x, \quad z^* = ct - x, \quad (21.4)$$

где

$$\rho = \sqrt{c^2 t^2 - x^2} = ct\sqrt{1 - M^2}, \quad \phi = \ln \sqrt{\frac{ct + x}{ct - x}} = \ln \sqrt{\frac{1 + M}{1 - M}}.$$

В этом случае имеем две области докритических скоростей $|V| < c$ с действительными величинами модуля ρ и аргумента ϕ , отсчитываемого от вертикальной оси t . Эти области представляются верхним III и нижним IV квадрантами плоскости гиперболических чисел. На рис. 7.1 показаны также гиперболы $\rho = \pm\sqrt{c^2 t^2 - x^2}$ при $\rho = 1$ и $c=1$ (кривые 3 и 4).

Преобразования вращения в плоскости гиперболического аргумента. Рассмотрим преобразования независимых переменных x и t , оставляющие неизменными интервалы ρ в плоскости гиперболического аргумента. Этими преобразованиями будут параллельные переносы и вращения системы координат. Параллельные переносы приводят к элементарному изменению начала координат ($x=0, t=0$) и не позволяют получить дополнительных интересных свойств пространства гиперболического аргумента и его функций. В то же время преобразования вращения дают уникальную информацию о свойствах пространства – времени и функций гиперболического аргумента.

Переход от координат x, t к новым координатам X, T при применении преобразования поворота определяется формулами

$$X = x \operatorname{ch} \phi - ct \operatorname{sh} \phi, \quad T = -\frac{x}{c} \operatorname{sh} \phi + t \operatorname{ch} \phi. \quad (21.5)$$

где ϕ – угол поворота. При преобразованиях (21.5) величина интервала ρ не меняется.

Сверхкритические и докритические преобразования Лоренца. Представим преобразования поворота (21.5) для двух случаев: квадрантов I и II сверхкритических областей и квадрантов III и IV докритических областей. Для первого случая гиперболических аргументов (21.1) имеем

$$\operatorname{th} \phi = \frac{ct}{x} = \frac{c}{V} = \frac{1}{M},$$

$$\operatorname{sh} \phi = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} = \gamma, \quad \operatorname{ch} \phi = \frac{M}{\sqrt{M^2 - 1}} = \gamma M.$$

Подставляя последние формулы в (21.5), получаем «сверхкритический» аналог преобразований Лоренца

$$X = \gamma(Mx - ct), \quad cT = \gamma(Mct - x). \quad (21.6)$$

Для второго случая гиперболических аргументов (21.4) пишем

$$\operatorname{th} \phi = M,$$

$$\operatorname{sh} \phi = \frac{M}{\sqrt{1 - M^2}} = \gamma M, \quad \operatorname{ch} \phi = \frac{1}{\sqrt{1 - M^2}} = \gamma$$

и получаем обычные «докритические» преобразования Лоренца

$$X = \gamma(x - Mct), \quad cT = \gamma(ct - Mx). \quad (21.7)$$

Использованный метод получения преобразований (21.6) и (21.7) повторяет подход А. Эйнштейна [87], который изложен также в [46, 47] при получении преобразований Лоренца (21.7) в специальной теории относительности (СТО). Однако традиционная СТО постулирует невозможность превышения скорости света c в пустоте [45–48], в связи с чем в ней не рассматривались преобразования (21.6). Если отказаться от этого постулата, то СТО легко обобщается на случай сверхсветовых скоростей (со «сверхсветовыми» преобразованиями Лоренца (21.6)).

§22. Функции гиперболического аргумента

По аналогии с функциями комплексного аргумента введем в рассмотрение функции гиперболического аргумента

$$\begin{aligned} f(z) &= p(x, t) + c\tilde{q}(x, t) = p(x, t) + q(x, t), \\ g(z^*) &= v(x, t) + c\tilde{w}(x, t) = v(x, t) + w(x, t). \end{aligned} \quad (22.1)$$

Условия дифференцируемости функций. Получим условия дифференцируемости функций (22.1). Для функции $g(z^*)$ аргумента z^* , отвечающего волне, распространяющейся в положительном направлении оси x , имеем

$$\frac{dg}{dz^*} = \frac{(v + w)'_x dx + (v + w)'_t dt}{dx - cdt}.$$

Введя величину скорости $V = dx/dt$ перепишем это соотношение

$$\frac{dg}{dz^*} = (v + w)'_x + \frac{v_t + cw_x + w_t + cv_x}{V - c}. \quad (22.2)$$

Достаточные условия существования единой, независящей от параметра V и отличной от тождественного нуля производной (22.2) могут быть записаны в виде

$$v_t + cw_x = 0, \quad w_t + cv_x = 0. \quad (22.3)$$

Соотношения (22.3) сводятся также к двум волновым уравнениям для функций v и w

$$v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0, \quad w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0. \quad (22.4)$$

Соотношения (22.3) представляют собой гиперболический аналог условий аналитичности Коши – Римана для функций комплексного переменного, а уравнения Даламбера (22.4) можно назвать гиперболическим аналогом уравнений Лапласа (при $c = \sqrt{-1} = i$ из (22.4) следуют уравнения Лапласа).

По аналогии с сопряженными гармоническими функциями, назовем функции v и w , удовлетворяющие уравнениям (22.3), сопряженными гиперболическими функциями. О свойствах решений волновых

уравнений (22.4) достаточную информацию можно получить, например, из монографий [148–150].

Примеры сопряженных гиперболических функций. Приведем примеры сопряженных гиперболических функций в акустике и электродинамике свободного пространства. Записав уравнения акустики для одномерного случая в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(\frac{p}{\rho_0 c} \right)}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial \left(\frac{p}{\rho_0 c} \right)}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (22.5)$$

где p и u – возмущения давления и скорости, ρ_0 – постоянная плотность, видим, что функции $\frac{p}{\rho_0 c}$ и u являются сопряженными гиперболическими функциями.

Функции характеристического аргумента $f(z)$ и $g(z^*)$ (22.1) для системы уравнений акустики имеют вид

$$f = \frac{p}{\rho_0 c} - u, \quad g = \frac{p}{\rho_0 c} + u \quad (22.6)$$

и сохраняются соответственно на характеристиках $\frac{dx}{dt} = \mp c$. Выражения $f = \text{const}$ и $g = \text{const}$ суть условия совместности на характеристиках левого и правого семейства [149].

Уравнения Максвелла (в одномерном случае)

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + c \frac{\partial H}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial H}{\partial t} + c \frac{\partial E}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (22.7)$$

показывают, что функции E и H являются также сопряженными гиперболическими функциями. Функции характеристического аргумента для (22.7)

$$f = E - H, \quad g = E + H \quad (22.8)$$

постоянны на характеристиках $\frac{dx}{dt} = \mp c$.

§23. Гиперболические и комплексные четырехмерные аргументы

Покоординатная форма. Рассматриваемые ниже четырехмерные аргументы являются некоторым аналогом четырехмерных векторов (4-векторов)

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z \quad (23.1)$$

теории поля, преобразуемых по соотношениям Лоренца и оставляющих инвариантным квадрат длины 4-радиус-вектора

$$\rho^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2. \quad (23.2)$$

Выпишем сначала сопряженные комплексные 4-векторы, принимая в этом случае $c = 1$,

$$\begin{aligned} \bar{z} &= x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} + it, \\ \bar{z}^* &= x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} - it, \end{aligned} \quad (23.3)$$

где $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – единичные орты на оси x, y, z пространственной системы координат, t – мнимая единица («орт» временной координаты).

Представим также сопряженные гиперболические 4-векторы для сверхкритических областей

$$\begin{aligned} \bar{z} &= x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} + ct, \\ \bar{z}^* &= x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} - ct \end{aligned} \quad (23.4)$$

и для докритических областей

$$\begin{aligned} \bar{z} &= ct + x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}, \\ \bar{z}^* &= ct - x\bar{i} - y\bar{j} - z\bar{k}, \end{aligned} \quad (23.5)$$

где c представляет собой «орт» временной координаты.

Имеем для (23.3)-(23.5) соответственно квадрат длины 4-радиус-вектора

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \bar{z} \cdot \bar{z}^* = x^2 + y^2 + z^2 + t^2, \\ \rho^2 &= \bar{z} \cdot \bar{z}^* = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2, \\ \rho^2 &= \bar{z} \cdot \bar{z}^* = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \end{aligned} \quad (23.6)$$

Векторная форма. Введем в рассмотрение также обычный трехмерный пространственный радиус-вектор

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$

с квадратом длины

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

и определим постоянный вектор \bar{V} – скорость (например, скорость движения одной инерциальной системы координат относительно другой; здесь \bar{r} связывает начала координат). Тогда

$$\bar{V} = \frac{x}{t}\bar{i} + \frac{y}{t}\bar{j} + \frac{z}{t}\bar{k},$$

а модуль скорости V и число Маха даются формулами

$$V = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad M = \frac{V}{c}.$$

Формулы (23.3)-(23.6) перепишем также в виде

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \bar{r} + it, \quad \bar{z}^* = \bar{r} - it, \quad \rho = t\sqrt{V^2 + 1}, \\ \bar{z} &= \bar{r} + ct, \quad \bar{z}^* = \bar{r} - ct, \quad \rho = ct\sqrt{M^2 - 1}, \\ \bar{z} &= ct + \bar{r}, \quad \bar{z}^* = ct - \bar{r}, \quad \rho = ct\sqrt{1 - M^2}. \end{aligned} \quad (23.7)$$

§24. Функции четырехмерного аргумента

Запишем теперь векторные функции четырехмерного комплексного и характеристического (23.7) аргументов в форме

$$\bar{f}(\bar{z}) = \bar{v}(\bar{r}, t) + ip(\bar{r}, t), \quad (24.1)$$

$$\bar{f}(\bar{z}) = \bar{v}(\bar{r}, t) + cp(\bar{r}, t). \quad (24.2)$$

Условия дифференцируемости. Получим условия дифференцируемости этих функций. Для (24.1) имеем

$$\frac{d\bar{f}}{dz} = \frac{(\bar{v} + ip)'_r d\bar{r} + (\bar{v} + ip)'_t dt}{dr + idt}$$

или

$$\frac{d\bar{f}}{dz} = (\bar{v} + ip)'_r + \frac{(\bar{v} + ip)'_t - i(\bar{v} + ip)'_r}{V + i}. \quad (24.3)$$

Условия существования единой, независящей от параметра V и отличной от тождественного нуля производной (24.3) (четырехмерный аналог условий Коши – Римана) можно записать в форме соотношений

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div} \bar{v} = 0, \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} p = 0. \quad (24.4)$$

Из (24.4) следуют 4-мерные уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \Delta p = 0, \quad \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} + \Delta \bar{v} = 0. \quad (24.5)$$

В силу выполнения (24.5) скалярное поле p и векторное поле \bar{v} можно назвать сопряженными гармоническими полями (функциями).

Условия дифференцируемости функции (24.2) гиперболического аргумента получаем аналогичным путем в форме

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c \operatorname{div} \bar{v} = 0, \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + c \operatorname{grad} p = 0 \quad (24.6)$$

Сопряженные поля. Уравнения (24.6) представляют собой уравнения распространения по времени акустических возмущений давления и скорости в трехмерном пространстве. Система (24.6) сводится к двум независимым волновым уравнениям Даламбера

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \Delta p = 0, \quad \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \bar{v} = 0. \quad (24.7)$$

В силу выполнения (24.7) в этом случае скалярное поле возмущенного давления p и векторное поле возмущенной скорости \bar{v} можно назвать сопряженными гиперболическими полями (функциями).

Уравнения электродинамики Максвелла для свободного пространства

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} - c \operatorname{rot} \bar{H} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \bar{E} &= 0 \end{aligned}$$

для векторов \bar{E} и \bar{H} сводятся к волновым уравнениям Даламбера. Здесь \bar{E} и \bar{H} можно назвать сопряженными гиперболическими функциями.

Расширенные уравнения Максвелла. Дадим пример сопряженных гиперболических векторных и скалярных полей из работы [22], которые описываются расширенной системой уравнений Максвелла (см. также §8)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} - c \operatorname{rot} \bar{H} + c \operatorname{grad} p &= 0, \\ \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \bar{E} + c \operatorname{grad} q &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + c \operatorname{div} \bar{E} &= 0, \\ \frac{\partial q}{\partial t} + c \operatorname{div} \bar{H} &= 0. \end{aligned} \quad (24.8)$$

Из (24.8) следуют уравнения Даламбера для каждой определяемой величины \bar{E}, \bar{H}, p и q .

Четырехмерные уравнения Лапласа. Отметим естественное свойство систем уравнений (24.8). При $c = i$ из них следуют четырехмерные уравнения Лапласа. Уравнения (24.8) можно также переписать (при $c = i$) без мнимой единицы (аналогично уравнениям Коши – Римана). Так, например, из (24.8) получим четырехмерный аналог уравнений Коши – Римана в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} - \operatorname{rot} \bar{H} + \operatorname{grad} p &= 0, \\ \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} - \operatorname{rot} \bar{E} - \operatorname{grad} q &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div} \bar{E} &= 0, \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \operatorname{div} \bar{H} &= 0. \end{aligned} \quad (24.9)$$

Дифференцируя первые два уравнения (24.9) по времени (с использованием исходных выражений) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{E} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{E} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{H} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{H} &= 0, \end{aligned}$$

которые с учетом формулы векторного анализа [22]

$$\Delta \bar{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{A} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{A}$$

сводятся к четырехмерным уравнениям Лапласа

$$\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} + \Delta \bar{E} = 0, \quad \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} + \Delta \bar{H} = 0. \quad (24.10)$$

Аналогично, дифференцируя последние два соотношения (24.9) по времени, приходим к уравнениям Лапласа

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \Delta p = 0, \quad \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \Delta q = 0. \quad (24.11)$$

В силу выполнения (24.10) и (24.11) два векторных \bar{E} и \bar{H} и два скалярных p и q поля в этом случае являются сопряженными гармоническими функциями.

В заключение параграфа отметим важное отличие сопряженных гиперболических функций от 4-вектор функций (например, 4-импульса) СТО. В обычной СТО 4-векторы непосредственно связаны с преобразованиями Лоренца. Рассматриваемые в настоящей работе гиперболиче-

ские функции представляют собой решения систем гиперболических уравнений.

§25. Расширенная Лоренц – инвариантность

Учитывая принципиальную важность вопроса Лоренц – инвариантности пространственно-временных координат, повторим еще раз актуальный материал, посвященный распространению Лоренц – инвариантности на область сверхкритических скоростей и на плоскость комплексного переменного.

Характеристические переменные. В целях наглядности изложения рассмотрим совместно двумерные уравнения Лапласа и Даламбера

$$u_{yy} - i^2 u_{xx} = 0 \quad \text{и} \quad u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad (25.1)$$

где x и y – пространственные координаты, t – время, i – мнимая единица, c – критическая скорость.

Представим сначала уравнения (25.1) в форме

$$(\partial_y - i\partial_x)(\partial_y + i\partial_x)u = 0 \quad \text{и} \quad (c\partial_y - \partial_t)(c\partial_y + \partial_t)u = 0. \quad (25.2)$$

Через ∂_x, ∂_y и ∂_t обозначены операторы частных производных по x, y и t . Следуя подходу Даламбера, рассмотрим «характеристические» переменные z и z^*

$$x + iy = z, \quad x - iy = z^* \quad \text{и} \quad x + ct = z, \quad x - ct = z^* \quad (25.3)$$

соответственно. Первые из этих переменных суть обычные комплексно-сопряженные числа, вторые – характеристики гиперболического уравнения Даламбера.

Используя аналогию с комплексными числами, определим для чисел (25.3) модули

$$\rho = \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{и} \quad \rho = \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{x^2 - c^2 t^2}, \quad (25.4)$$

экспоненциальную и тригонометрическую запись

$$z = \rho e^{i\phi} = \rho(\cos \phi + i \sin \phi) \quad \text{и} \quad z = \rho e^{\psi} = \rho(\operatorname{ch} \psi + \operatorname{sh} \psi). \quad (25.5)$$

Здесь ϕ – аргумент характеристического числа, определяемый соотношениями

$$\phi = \operatorname{arctg}(y/x) \quad \text{и} \quad \phi = \ln \sqrt{\frac{x+ct}{x-ct}}, \quad (25.6)$$

соответственно, и отсчитываемый от оси абсцисс x против часовой стрелки.

Представим также уравнения (25.1) в форме

$$(\partial_x - i\partial_y)(\partial_x + i\partial_y)u = 0 \quad \text{и} \quad (\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)u = 0 \quad (25.7)$$

В этом случае характеристические переменные записутся как

$$y + ix = z, \quad y - ix = z^* \quad \text{и} \quad ct + x = z, \quad ct - x = z^*. \quad (25.8)$$

Эти числа имеют модули

$$|z| = \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{и} \quad |z| = \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{c^2 t^2 - x^2}, \quad (25.9)$$

ту же экспоненциальную и тригонометрическую форму (25.5), однако при этом их аргументы ϕ определяются как

$$\phi = \operatorname{arctg}(x/y) \quad \text{и} \quad \phi = \ln \sqrt{\frac{ct+x}{ct-x}} \quad (25.10)$$

и отсчитываются от осей ординат y и t по часовой стрелке.

Отметим, что если комплексные характеристические числа (25.3) и (25.8) практически идентичны, имеют одинаковые модули $|z|$ и только отличаются началом и направлением отсчета аргументов ϕ , то «гиперболические» характеристические числа (вторые в (25.3) и (25.8)) существенно различны, имеют различные «гиперболические» интервалы (модули) $|z| = \sqrt{x^2 - c^2 t^2}$ и $|z| = \sqrt{c^2 t^2 - x^2}$ и различные аргументы (25.6) и (25.10).

Введем параметр $V = x/t$ с размерностью скорости и число Маха $M = V/c$. Тогда для гиперболических чисел (25.3) и (25.8) можно записать интервал $|z|$ соответственно в виде

$$|z| = t\sqrt{V^2 - c^2} = ct\sqrt{M^2 - 1} \quad \text{и} \quad |z| = t\sqrt{c^2 - V^2} = ct\sqrt{1 - M^2} \quad (25.11)$$

В связи с приведенной записью гиперболические переменные (25.3) можно условно назвать сверхкритическими (сверхзвуковыми или сверхсветовыми), а гиперболические переменные (25.8) условно назвать докритическими (дозвуковыми или досветовыми).

Здесь интересно отметить, что исторически, начиная с работы В. Фогта 1887 года [88], для уравнения Даламбера, а затем и в теории относительности рассматривались только гиперболические интервалы типа (25.9) и связанные с ними обычные «докритические» преобразования Лоренца. В то же время в теоретической газодинамике хорошо освоен диапазон как докритических, так и сверхкритических скоростей, в том числе область перехода через критическую скорость (трансзвуковая область). Ниже этому вопросу уделяется особое внимание.

Преобразования вращения. Рассмотрим плоскость характеристических переменных (комплексных чисел $x + iy$ или гиперболических чисел $x + ct$) и преобразования вращения в этой плоскости, оставляющие неизменными соответствующие интервалы $|z|$. Данным преобразованиям с учетом формул (25.5) можно придать форму

$$z \cdot e^{-i\phi} = \text{const} \quad \text{и} \quad z \cdot e^{-i\phi} = \text{const} \quad (25.12)$$

Запишем преобразования вращения в покоординатной форме, обозначая через X, Y, T новые переменные. Преобразования поворота в характеристических плоскостях переменных (25.3) реализуются на угол ϕ , отсчитываемый от оси абсцисс против часовой стрелки, по формулам (рис. 7.2,а и 7.3,а)

$$\left. \begin{aligned} X &= x \cos \phi + y \sin \phi, \\ Y &= y \cos \phi - x \sin \phi, \end{aligned} \right\} \quad \text{и} \quad \left. \begin{aligned} X &= x \operatorname{ch} \phi - ct \operatorname{sh} \phi, \\ cT &= ct \operatorname{ch} \phi - x \operatorname{sh} \phi, \end{aligned} \right\} \quad (25.13)$$

а в плоскостях переменных (11) на угол ϕ , отсчитываемый от оси ординат по часовой стрелке, по формулам (рис. 7.2,б и 7.3,б)

$$\left. \begin{aligned} X &= x \cos \phi - y \sin \phi, \\ Y &= y \cos \phi + x \sin \phi, \end{aligned} \right\} \quad \text{и} \quad \left. \begin{aligned} X &= x \operatorname{ch} \phi - ct \operatorname{sh} \phi, \\ cT &= ct \operatorname{ch} \phi - x \operatorname{sh} \phi, \end{aligned} \right\} \quad (25.14)$$

Обычной подстановкой легко убедиться, что приведенные преобразования вращения сохраняют (оставляют инвариантными) соответствующие интервалы $|z|$ (для плоскости комплексных переменных

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, для плоскости гиперболических переменных $\rho = \sqrt{x^2 - c^2 t^2}$ и $\rho = \sqrt{c^2 t^2 - x^2}$). При этом уравнение Лапласа инвариантно относительно преобразований (25.13) и (25.14) в плоскости комплексных переменных, уравнение Даламбера инвариантно относительно преобразований (25.13) и (25.14) в плоскости гиперболических переменных.

Далее целью нашего анализа будет запись преобразований Лоренца. Здесь, следуя классической работе А. Эйнштейна, рассмотрим систему координат, движущуюся со скоростью V_0 , однако не будем ограничиваться только диапазоном докритических скоростей $V_0 < c$, а рассмотрим также и диапазоны сверхкритических скоростей $V_0 > c$ (c – скорость света). Переход в такую систему координат эквивалентен вышеприведенным преобразованиям поворота: при $V_0 > c$ (когда $M = V_0/c > 1$) имеем

$$\operatorname{th} \phi = \frac{c}{V} = \frac{1}{M}, \quad \operatorname{sh} \phi = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} = \gamma, \quad \operatorname{ch} \phi = \frac{M}{\sqrt{M^2 - 1}} = \gamma M \quad (25.15)$$

и подставляя (25.15) в (25.13) получаем сверхкритический аналог преобразований Лоренца

$$X = \gamma(Mx - ct), \quad cT = \gamma(Mct - x); \quad (25.16)$$

при $V_0 < c$ (когда $M < 1$) имеем

$$\operatorname{th} \phi = \frac{V}{c} = M, \quad \operatorname{sh} \phi = \frac{M}{\sqrt{1-M^2}} = \gamma M, \quad \operatorname{ch} \phi = \frac{1}{\sqrt{1-M^2}} = \gamma, \quad (25.17)$$

и подставляя (25.17) в (25.14) получаем обычные докритические преобразования Лоренца

$$X = \gamma(x - Met), \quad cT = \gamma(ct - Mx). \quad (25.18)$$

В соотношениях (25.15) и (25.17) через γ обозначен фактор Лоренца, который для традиционных преобразований Лоренца равен привычной величине $\gamma = 1/\sqrt{1 - M^2}$, а для сверхкритических преобразований $\gamma = 1/\sqrt{M^2 - 1}$. Интересным также представляется выписать «фак-

тор Лоренца» для преобразований комплексных переменных (первые формулы (25.13) и (25.14)). В данном случае он равен

$$\gamma = 1/\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \phi},$$

и его величина не зависит от направления преобразований вращения (по или против часовой стрелки).

Запишем расширенную Лоренц – инвариантность в плоскости комплексных переменных с использованием приведенного фактора γ и обозначая $k = \operatorname{tg} \phi$. Имеем соответственно для первых формул из (25.13) и (25.14)

$$\left. \begin{aligned} X &= \gamma(x + ky), \\ Y &= \gamma(y - kx), \end{aligned} \right\} \quad \text{и} \quad \left. \begin{aligned} X &= \gamma(x - ky), \\ Y &= \gamma(y + kx). \end{aligned} \right\}$$

С учетом вышеизложенного можно высказать утверждение, что Лоренц – инвариантность естественным образом распространяется на область сверхкритических скоростей и на плоскость комплексного переменного.

Сверхкритические преобразования Лоренца (4-хмерный случай). Для новой системы координат X, Y, Z, T , которая движется относительно исходной системы координат x, y, z, t вдоль оси x со скоростью V_0 , имеем следующие сверхкритические преобразования Лоренца

$$x = \gamma(MX + cT), \quad y = Y, \quad z = Z, \quad cT = \gamma(McT + X), \quad (25.19)$$

где $\gamma = 1/\sqrt{M^2 - 1}$, $M = V_0/c$. Из дифференцирования (25.19) следует

$$dx = \gamma(MdX + cdT), \quad dy = dY, \quad dz = dZ, \quad dt = \gamma(McdT + dX).$$

Разделив первые три равенства на dt , получим формулы преобразования скоростей

$$u = \frac{MU + c}{M + U/c}, \quad v = \frac{V\sqrt{M^2 - 1}}{M + U/c}, \quad w = \frac{W\sqrt{M^2 - 1}}{M + U/c}. \quad (25.20)$$

При $M \rightarrow \infty$ имеем $u = U$, $v = V$, $w = W$.

Справедливость расширенной Лоренц – инвариантности приводит к необходимости рассмотрения перехода через критическую скорость (и, в частности, через значение скорости света в свободном про-

странстве). Естественно также встает вопрос о границах применимости формулы $E = mc^2$. На оба эти актуальные вопросы можно получить обоснованный ответ, если для преодоления «критического барьера» использовать методологию теоретической газовой динамики и ее широкого практического подтверждения.

Выводы

1. Демонстрацию ряда важных свойств волнового уравнения Даламбера удобно проводить с помощью ввода в рассмотрение гиперболических переменных и их функций, которые представляют собой аналог комплексных переменных и аналитических функций. В отличие от комплексных переменных здесь следует рассматривать классы докритических и сверхкритических переменных.
2. Преобразования вращения в плоскости гиперболического аргумента позволяют получить не только традиционные докритические преобразования Лоренца, но также и сверхкритические преобразования Лоренца. Как следствие этого область применения релятивистской методологии может быть существенно расширена.
3. Условия дифференцируемости функций гиперболического аргумента приводят к понятиям сопряженных гиперболических функций (по аналогии с сопряженными гармоническими функциями в теории аналитических функций).
4. Продемонстрированная расширенная Лоренц-инвариантность пространственно-временных координат ставит важный вопрос возможности преодоления «критического барьера» (скорости распространения малых возмущений) и справедливости формулы $E = mc^2$ для материальных частиц в области околокритических (релятивистских) скоростей.

ГЛАВА V. МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Данная глава содержит некоторые иллюстрации применения изложенных в работе подходов к моделированию «одномерной» микроструктурной турбулентности (§26) и изолированных солитонов в плазме (§27). К интересным на наш взгляд результатам главы можно отнести расширение рамок релятивизма в плане построения Акустической Теории Относительности (АТО) в §28, распространения СТО на область сверхсветовых скоростей в §29 и описания сверхсветовых частиц («тахионов») с вещественной массой в §30.

§26. Одномерная микроструктурная турбулентность

В настоящем параграфе продемонстрированы особенности «одномерной турбулентности», которая иллюстрируется численными решениями инвариантного квазилинейного уравнения третьего порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{l^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2} + \frac{l^2}{6} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(\frac{u^2}{2} \right) = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (26.1)$$

Критическое число Рейнольдса и критическая скорость перехода. Справедливость континуальных уравнений, описывающих непрерывные решения, нарушается, когда градиенты макроскопических переменных становятся весьма значительными и определяемые ими масштабы длины имеют размеры порядка средней длины свободного пробега молекул. Возможность описания подобных зон больших (в пределе бесконечных) градиентов в модели Эйлера для идеального газа обеспечивается введением соотношений на разрывах, которые следуют, также как и дифференциальные уравнения, из интегральных законов сохранения массы, импульса и энергии. При использовании модели вязкого теплопроводного газа подобные зоны представляются узкими фронтами перехода (размера длины свободного пробега молекул). Для замыкания уравнений движения вязкого теплопроводного газа требуется напряжение трения и тепловой поток выразить через макроскопические параметры. При этом коэффициенты трения и теплообмена могут быть вычислены на основе кинетической теории (см., например, [1-6, 66, 123]). Так, величина коэффициента кинематической вязкости ν выражается

через среднюю скорость хаотического движения молекул v_{cp} и длину свободного пробега молекул l по формуле

$$v = 0,499 v_{cp} l \approx 0,5 v_{cp} l. \quad (26.2)$$

Запишем безразмерный коэффициент перед слагаемыми, определяющими вязкие эффекты в уравнениях Навье – Стокса, как обратное число Рейнольдса

$$\frac{1}{Re} = \frac{v}{UL}, \quad (26.3)$$

где U и L – характерные скорость и длина рассматриваемого макроскопического процесса. Подстановка (26.2) в (26.3) даёт

$$\frac{1}{Re} = \frac{v_{cp} l}{2UL}. \quad (26.4)$$

Безразмерная величина l/L , называемая числом Кнудсена Kn , характеризует влияние масштаба эффектов молекулярного переноса. Для справедливости континуального подхода необходимо, чтобы число Кнудсена было малым по сравнению с единицей.

Перепишем соотношение (26.4) в форме

$$\frac{v_{cp}}{U} \cdot Kn \cdot Re = 2 \quad (26.5)$$

и введем еще одно безразмерное число

$$I = v_{cp}/U, \quad (26.6)$$

характеризующее динамику молекулярного переноса для используемого макроскопического приближения. Тогда (26.5) перепишется в виде

$$I \cdot Kn \cdot Re = 2. \quad (26.7)$$

Число I , как мы увидим далее, весьма удобный параметр при изучении вязких переходных процессов^{*)}.

Выполненный в §16 анализ структуры стационарных решений уравнения (26.1) позволяет для рассматриваемого случая ввести «критическое число Рейнольдса», при котором для решения в виде фронта перехода тип двух определяющих особых точек меняется с узла на фо-

^{*)} Подчеркнем, что вводимое таким образом число I обратно пропорционально числу Маха.

кус (см. соотношение (16.5)). Это число получается при равенстве нулю подкоренного выражения, когда

$$\alpha = 2/U/\sqrt{6}.$$

Перепишем это соотношение в виде критического числа Рейнольдса

$$Re_* = UL/\alpha = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad (26.8)$$

Полагая в соответствии с (26.2) «коэффициент кинематической вязкости» $\alpha = 0,5 v_{cp} l$, получаем из (26.8) критическую скорость U_* и критическое число I_* перехода (значение, при котором меняется характер особых точек)

$$U_* = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\alpha}{l}} = 0,61 v_{cp}, \quad I_* = \frac{v_{cp}}{U_*} = 1,64. \quad (26.9)$$

Подчеркнем, что такие значения критической скорости, критического числа Рейнольдса и критического числа I_* следуют из анализа при допущении справедливости для описания одномерного вязкого течения уравнения Бюргерса и рассматриваемой модели микроструктурной турбулентности.

Дисперсионное соотношение. Для линеаризованного аналога уравнения (26.1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + l_0^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + l_0^2 a \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (26.10)$$

где a есть константа, а $l_0 = l/\sqrt{6}$, имеем дисперсионное соотношение

$$\omega(k) = ak - i \frac{\alpha}{1 - (kl_0)^2}.$$

Отсюда следует, что для решений линеаризованного уравнения (26.10) фазовая скорость различных мод одинакова, равна a и совпадает с групповой скоростью. Имеется граница устойчивости $k = 1/l_0$: амплитуды гармоник с волновыми числами $k > 1/l_0$ экспоненциально растут по времени, а при $k < 1/l_0$ – затухают.

Сделаем также замечание о влиянии слагаемых более высокого порядка. Выпишем второе дифференциальное приближение для осредненного уравнения Бюргерса с точностью до $O(l^6 + \alpha l^2)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{l^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + \frac{l^2}{3!} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \frac{l^4}{5!} \frac{\partial^5 u}{\partial t \partial x^5} + \frac{l^4}{5!} \frac{\partial^5}{\partial x^5} \left(\frac{u^2}{2} \right) = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (26.11)$$

Линейный аналог этого уравнения имеет следующее дисперсионное соотношение:

$$\omega = ak - \frac{i\alpha}{1 - (kl_0)^2 + (kl_1)^4}, \quad (26.12)$$

где $l_0 = l/\sqrt{6}$, $l_1 = l/(5!)^{1/4}$. Из (26.12) следуют выводы, аналогичные выводам для линеаризованного уравнения (26.10). При $1 < kl_0 < 19$ амплитуды гармоник экспоненциально возрастают.

В [29] численно проанализированы задачи о распаде начального сжатия и об эволюции фронта (распаде разрыва). Показано существенное отличие решений этих задач для уравнения (26.1) и уравнения Кортевега – де Вриза – Бюргерса.

Численные решения. Ниже приводятся некоторые численные решения этого уравнения, полученные с помощью неявной двухслойной по времени дивергентной разностной схемы, в которой аппроксимация производных по x на каждом временном слое проведена с помощью симметричных разностей на пятиточечном шаблоне с четвертым порядком аппроксимации [151].

На рис. 26.1 показаны численные решения уравнения (26.1) при разрывных начальных данных: $u(x, 0) = 1$ при $x \leq 0$ и $u(x, 0) = -1$ при $x > 0$. Значения параметров $\alpha = 0,001$ и $l_0 = 0,1$. Приведены решения для двух моментов времени $t=5$ (рис. 26.1, а) и $t \sim \infty$ (рис. 26.1, б). Кривые 1 соответствуют величине u , а 2 – осредненному значению u , посчитанному для характерного масштаба L , удовлетворяющего условию $L \gg l$.

Важным вопросом для данного подхода является вычисление интенсивности турбулентных пульсаций и турбулентной вязкости. Для демонстрации возможности таких вычислений представим уравнение Бюргерса, осредненное классическим путем, в форме

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[(\alpha + v_T) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right],$$

где

$$v_T = -b / \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \quad b = \frac{\bar{u}'^2}{2}.$$

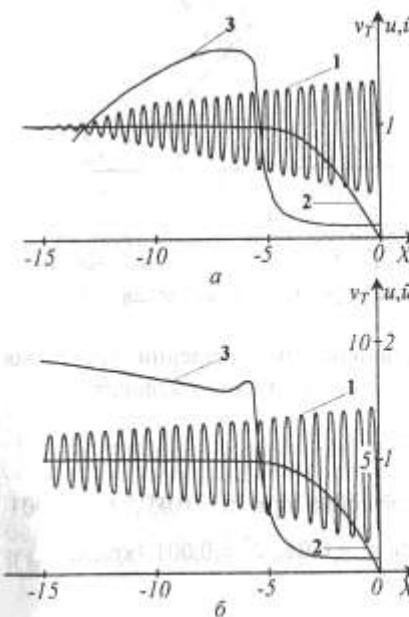


Рис. 26.1 Численные решения уравнения (26.1) при $\alpha=0,001$, $l_0=0,1$ в моменты времени $t=5$ (а) и $t \sim \infty$ (б)

$$u(x, 0) = \frac{1}{2} [1 - \operatorname{th}(10x)].$$

На рис. 26.2 сплошной линией приведено монотонное численное решение этой задачи при $\alpha = 0,1$ и $l_0 = 0,1$, штриховой линией – немонотонное решение при $\alpha = 0,01$, $l_0 = 0,1$, пунктирной линией – решение при меньших $\alpha = 0,001$, $l_0^2 = 0,001$ в моменты времени $t=0, 2, 4$. С уменьшением α и l_0 решения уравнения (26.1) приближаются к соответствующему решению квазилинейного уравнения первого порядка

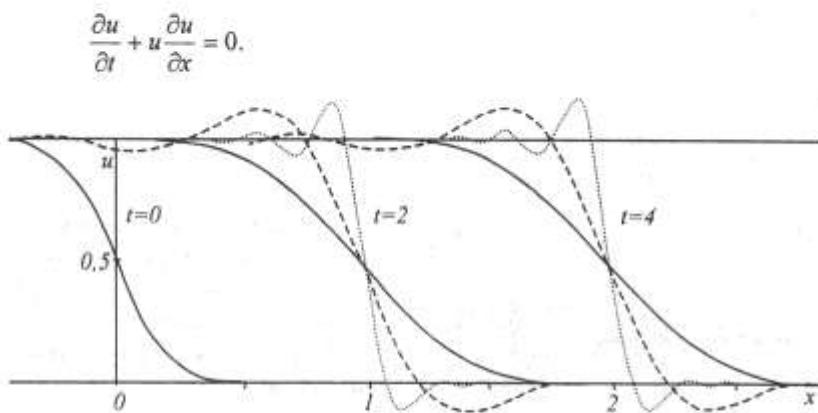


Рис. 26.2 Численные решения задачи об эволюции фронта для уравнения (26.1) в моменты времени $t=0, 2, 4$. $\alpha=0,1$, $l_0=0,1$ – сплошная линия, $\alpha=0,01$, $l_0=0,1$ – штриховая линия, $\alpha=0,001$, $l_0^2=0,001$ – пунктирная линия.

Приведем теперь примеры стационарных решений уравнения (26.1) на ограниченном отрезке $0 \leq x \leq 1$ при граничных условиях

$$u(0,t) = 1, \quad u|_{x=0} = 0, \quad u(1,t) = 0.$$

На рис. 26.3 показано монотонное решение при $\alpha = 0,05$, $l_0^2 = 0,001$ (кривая 1), немонотонное решение при $\alpha = 0,01$, $l_0^2 = 0,001$ (кривая 2) и измерение осредненной величины

$$\bar{u}(x) = u(x) + l_0 u_{xx}$$

для последнего случая (кривая 3).

При применении рассматриваемого подхода исходная система уравнений заменяется системой более высокого порядка, требующей постановки дополнительных граничных условий. В рассчитанных в этом разделе примерах в силу симметрии решений (например, при $x=0$ на рис. 26.1 и 26.3) постановка дополнительного условия не представляла труда. Также не представляет труда постановка граничных условий в случаях, когда одна из границ области отвечает бесконечности с невозмущенными параметрами. Однако данный вопрос требует специального рассмотрения в каждом конкретном случае.

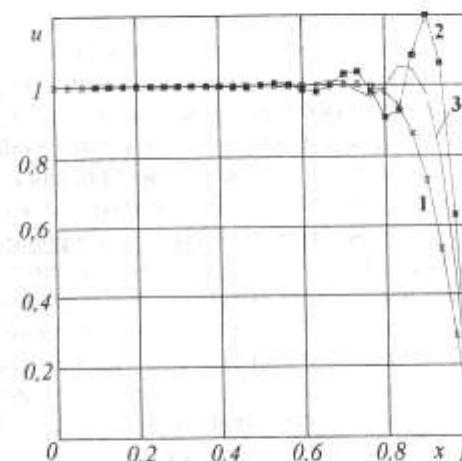


Рис. 26.2 Стационарные решения уравнения (26.1) на отрезке $0 \leq x \leq 1$. $\alpha=0,05$, $l_0^2=0,001$ – кривая 1, $\alpha=0,01$, $l_0^2=0,001$ – кривая 2, измерение осредненной величины при $\alpha=0,01$, $l_0^2=0,001$ – кривая 3.

§27. Солитоны в плазме

Исследованию уединенных волн – солитонов в плазме посвящено большое количество работ. Обширную библиографию по этому вопросу и обзор полученных результатов можно найти в [8, 152–155].

Впервые сверхкритические (имеющие сверхзвуковую скорость распространения) солитонные решения уравнений движения разреженной плазмы с конечной электронной температурой и нулевой ионной температурой были рассмотрены Р.З. Сагдеевым (см., например, [156]). В его работах проанализирована структура стационарных одномерных решений одного дифференциального уравнения второго порядка для потенциала и, в частности, получено критическое значение амплитуды уединенной волны, которой соответствует число Маха, приближенно равное 1,6. Подход Р.З. Сагдеева был применен также в случае беспстолкновительной горячей плазмы с адиабатическим уравнением состояния [157].

Из гидродинамических уравнений движения для ионов при отсутствии магнитного поля, когда для электронов предполагается большемановское распределение, а возмущения плотности ионов считаются малыми, следуют уравнения Буссинеска и Кортевега – де Вриза [8, 158].

Однако такое приближение дает заметное отличие от экспериментальных данных [154, 159], в силу чего исследование ионно-звуковых солитонов проводится с учетом дополнительных важных эффектов, например, эффектов взаимодействия с резонансными частицами. Так, в [160, 161] для этого случая дан вывод возмущенных уравнений Буссинеска и Кортевега – де Вриза и получены явные уравнения для слагаемых, описывающих указанное взаимодействие в некоторых предельных случаях.

Сверхзвуковые и частицеподобные изолированные импульсы. В рамках настоящей монографии точные солитонные решения уравнений движения ионов (§12) получены при допущении значительных отклонений концентрации ионов от своей невозмущенной величины (§17). Наряду с сверхзвуковыми солитонами, типа солитонов Р.З. Сагдеева, получены точные решения для дозвуковых частицеподобных солитонов с сконцентрированными в их центре отрицательным зарядом и массой. Подробный теоретический анализ таких точных решений выполнен в §17.

В связи с полученными точными решениями укажем, что солитонные решения с сосредоточенными в их центре массой и зарядом представляют собой одномерные модели заряженных материальных точек. На рис. 17.1 такому решению отвечает сепаратриса, исходящая из седловой особой точки 2 и приходящая в узловую особую точку 1. В последней имеется сосредоточенный отрицательный заряд и сосредоточенная масса (рис. 17.2). Эта точка (в одномерном случае плоская поверхность) окружена слоями с повышенной плотностью положительных ионов («шубой»).

Отметим также, что такая заряженная материальная точка может двигаться в плазме с сверхзвуковой скоростью ($U=1,5695$) при реализации бесскачкового торможения сжимаемой среды с плавным переходом через значение критической скорости (при нулевом волновом сопротивлении). Представляется весьма интересным изучить подобные решения для заряженной материальной точки (тела) в двумерном и пространственном случаях.

Взаимодействие с резонансными частицами. Продемонстрируем возможность применения изложенного в §12 и §17 подхода при наличии эффектов взаимодействия ионных волн с резонансными частицами плазмы. Для получения соответствующих уравнений будем следовать методу, предложенному в [160].

Уравнение Пуассона для электрического потенциала в этом случае записывается в форме

$$\Delta\phi = 4\pi e[n_0 \exp(e\phi/T_e) - n] + 4\pi e \int_{(r)} (f_e - f_i) dV, \quad (27.1)$$

где значок (r) обозначает интегрирование по резонансной области пространства скоростей, f_e и f_i – функции распределения электронов и ионов. Введем обозначение

$$S = \int_{(r)} (f_e - f_i) dV.$$

Из (27.1) без использования каких-либо упрощающих предположений по аналогии с преобразованиями §12 получим

$$\frac{e}{m} n \nabla \phi = c^2 \nabla n + D^2 n_0 \frac{e}{m} \nabla \Delta \phi - \frac{D^2 n_0}{c_0^2} \frac{e^2}{m^2} \nabla \phi \Delta \phi + c_0^2 \nabla S. \quad (27.2)$$

Последнее слагаемое этого соотношения учитывает эффекты взаимодействия с резонансными частицами. Это слагаемое добавляется в правые части уравнений движения ионов. Вычисление величины S для ряда предельных случаев подробно описано в [160].

Методика получения точных решений, изложенная в §12 и §17, обобщается на случай адиабатического уравнения состояния плазменной среды [27]. Эффективный размер получаемых частицеподобных солитонов, в частности его полуширина, для адиабатического случая с показателем адиабаты $\kappa = 1,4$ существенно превышает размер солитона для изотермического случая с $\kappa = 1$.

Экранирование отрицательного заряда. Важный частный случай построенных стационарных решений реализуется при нулевых скоростях ионов, когда задача фактически сводится к задачи экранировки поля статического отрицательного заряда изотропной плотной плазмой. В данном случае легко получить уравнение, описывающее изменение потенциала в пространстве (выпишем его для адиабатических случаев с показателем адиабаты $\kappa = 1,4$ и 1)

$$D^2 \Delta \phi = \exp \phi - [1 - (\kappa - 1)c_e^2 \phi / \kappa c_0^2]^{1/(\kappa-1)} \text{ при } \kappa \neq 1$$

$$D^2 \Delta \phi = \exp \phi - \exp(-c_e^2 \phi / c_0^2) \text{ при } \kappa = 1.$$

Здесь потенциал не должен полагаться слабым. Вырожденная особая точка, в которой $\phi \rightarrow -\infty$, отождествляется с точечным отрицательным зарядом.

В качестве физической аналогии построенным решениям приведем еще поле около заостренного отрицательного электрода, имеющего очень большое отрицательное значение потенциала и достаточно сильно ионизирующую окружающую среду. Наблюдающаяся в этом случае отрицательная корона может присутствовать также вокруг дозвуковых солитонов, если предположить возможность их существования в подобной среде.

В заключение подчеркнем еще раз, что наличие стационарных дозвуковых солитонных решений продемонстрировано только для системы одномерных нестационарных уравнений двухжидкостной плазмы. Интересным представляется вопрос об аналогичных солитонных решениях для двумерного и пространственного случаев. Не анализировались также различные каналы отвода энергии от солитона и его устойчивость по отношению к неодномерным возмущениям. Ясно видна необходимость экспериментальной проверки возможности существования полученных теоретически дозвуковых солитонных решений (как ранее это было выполнено для сверхзвуковых солитонов). Однако, если, к примеру, допустить гипотезу, что шаровая молния представляет собой дозвуковой ионный солитон, то можно (конечно, с большими оговорками) сказать, что некоторые экспериментальные подтверждения полученным решениям уже имеются (укажем в этой связи на возможность установить качественное соответствие между рядом свойств дозвуковых солитонов и известных свойств шаровых молний и на опубликованные сообщения об отделении коронных разрядов от электродов [163]). Такая высказанная гипотеза о природе шаровой молнии будет близка к гипотезам [164-166].

§28. Акустическая теория относительности

Исходные уравнения. Систему линейных уравнений акустики запишем в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + c \operatorname{div} \bar{u} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + c \operatorname{grad} p &= 0. \end{aligned} \quad (28.1)$$

где через p обозначена скалярная величина возмущенного давления, деленного на импеданс среды $\rho_0 c$.

Система уравнений (28.1) описывает изменение во времени в изучаемой области евклидова пространства Ω скалярного поля давле-

ния p и векторного поля скорости \bar{u} и является замкнутой. При этом интервал ds евклидова пространства, определяемый равенством

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

и интервал времени dt полностью независимы и являются инвариантами в любой инерциальной системе отсчета. Этим определяются абсолютные свойства стрелы времени и трехмерного пространства Евклида.

В то же время введем также четырехмерные гиперболические числа по формулам (23.4) и (23.5). Наряду с абсолютным четырехмерным пространством Евклида (x, y, z, t) с независимыми интервалами ds и dt рассмотрим также четырехмерное псевдоевклидово пространство Минковского с взаимозависимыми интервалами ds и dt , определяемыми по формулам: для сверхзвуковых скоростей

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2, \quad (28.2)$$

для дозвуковых скоростей

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (28.3)$$

Вводя скорость материальной частицы

$$V = \frac{dx}{dt} \bar{i} + \frac{dy}{dt} \bar{j} + \frac{dz}{dt} \bar{k}$$

и число Маха $M = V/c$, перепишем (28.2) и (28.3) соответственно в виде

$$p = ds = c dt \sqrt{M^2 - 1}, |M| > 1, \quad (28.4)$$

$$p = ds = c dt \sqrt{1 - M^2}, |M| < 1.$$

«Акустический» фактор Лоренца. Определим теперь «акустический» фактор Лоренца γ для $M > 1$ и $M < 1$ соответственно по формулам

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} \text{ и } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - M^2}}. \quad (28.5)$$

В газовой динамике множитель (28.5) играет важную роль, в частности, при формулировке правила подобия Прандтля – Глаузтера для

дозвуковых течений и закона подобия Аккерета для сверхзвуковых течений (см., например, [6]). Здесь следует также специально подчеркнуть, что множитель (28.5) широко используется также в акустической теории неоднородной движущейся среды (по этому вопросу укажем цикл исследований Д.И. Блохинцева, результаты которого суммированы в монографии [167]). В дальнейшем множитель (28.5) обозначим как « γ -фактор» (см. рис. 28.1).

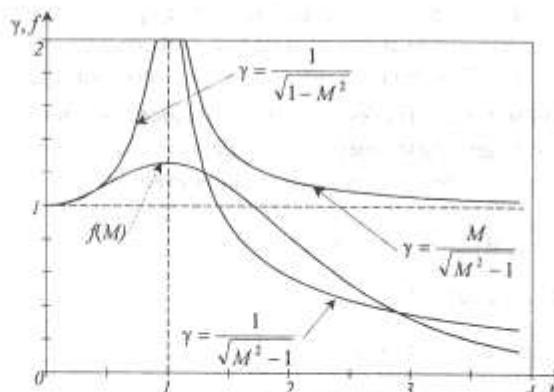


Рис. 28.1. Зависимость « γ -фактора» (28.5), «акустической приведенной плотности потока импульса» (28.16) и газодинамической функции (28.17) от числа Maxa.

Классическая газодинамика [1-7] и ее линеаризованный вариант – акустика [2,3] традиционно развивались по классическому пути механики Ньютона в абсолютном пространстве Евклида. Ниже показана возможность развития акустической теории относительности (АТО) в псевдоевклидовом пространстве Минковского по аналогии с методологией специальной теории относительности (СТО), причем здесь удается преодолеть «звуковой барьер» и построить АТО как в области дозвуковых скоростей, так и в области сверхзвуковых скоростей.

Двумерный вариант АТО. С целью наибольшей наглядности рассмотрим только две независимые переменные x и t и построим АТО в плоскости характеристических аргументов, когда система (28.1) сводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial p}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (28.6)$$

Уравнения (28.6) инвариантны относительно линейной группы пространственно-временных преобразований

$$X = \gamma(x - Mct), \quad cT = \gamma(ct - Mx), \quad (28.7)$$

при $|M| < 1$, $\gamma = 1/\sqrt{1 - M^2}$ и

$$X = \gamma(Mx - ct), \quad cT = \gamma(Mct - x), \quad (28.8)$$

при $|M| > 1$, $\gamma = 1/\sqrt{M^2 - 1}$.

Переход к переменным (28.7) и (28.8) сводит систему (28.6) к тому же виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial T} + c \frac{\partial U}{\partial X} &= 0, \\ \frac{\partial U}{\partial T} + c \frac{\partial P}{\partial X} &= 0, \end{aligned} \quad (28.9)$$

где

$$P = \gamma(p - Mu), \quad U = \gamma(u - Mp), \quad \text{при } |M| < 1, \quad (28.10)$$

и

$$P = \gamma(Mp - u), \quad U = \gamma(Mu - p), \quad \text{при } |M| > 1. \quad (28.11)$$

Для функций характеристического аргумента из (28.6) следуют два независимых характеристических уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t} + c \frac{\partial g}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial t} - c \frac{\partial f}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (28.12)$$

Соотношения (28.12) инвариантны к замене переменных (28.7) и (28.8). Имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial T} + c \frac{\partial G}{\partial X} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial T} - c \frac{\partial F}{\partial X} &= 0,\end{aligned}\tag{28.13}$$

где

$$\begin{aligned}G &= \gamma(1-M)g, \quad F = \gamma(1+M)f, \quad \text{при } |M| < 1, \\ G &= \gamma(M-1)g, \quad F = \gamma(M+1)f, \quad \text{при } |M| > 1.\end{aligned}$$

По аналогии с электродинамикой подчеркнем, что преобразования (28.7) и (28.8) сохраняют постоянным интервал (28.4) между двумя «акустическими событиями» и инвариант акустического поля

$$I = p^2 - u^2 = P^2 - U^2.$$

Следуя методологии обычной СТО можно рассматривать двумерный вектор (p, u) и назвать его 2-вектор давления – скорости.

Проанализируем изменение «заторможенного» давления при использовании преобразований (28.7) и (28.8). Из формул (28.10) и (28.11) при $u = 0$ получаем

$$\begin{aligned}P &= \gamma p^*, \quad \text{при } |M| < 1, \\ P &= \gamma M p^*, \quad \text{при } |M| > 1.\end{aligned}\tag{28.14}$$

Учитывая, что в любой точке акустического поля квадрат скорости звука

$$c^2 = p / \rho,$$

где p и ρ – возмущения давления и плотности, отнесенные к импедансу среды $\rho_0 c$, из (28.14) получаем изменение возмущенной плотности при использовании преобразований (28.7) и (28.8)

$$\begin{aligned}R &= \gamma p^*, \quad \text{при } |M| < 1, \\ R &= \gamma M p^*, \quad \text{при } |M| > 1.\end{aligned}\tag{28.15}$$

Из (28.14) следуют соотношения для «приведенной плотности потока импульса»

$$\begin{aligned}\frac{P}{p^*} &= \gamma, \quad \text{при } |M| < 1, \\ \frac{P}{p^*} &= \gamma M, \quad \text{при } |M| > 1.\end{aligned}\tag{28.16}$$

На рис. 28.1 представлены кривые изменения «акустической приведенной плотности потока импульса» (28.16) и соответствующей газодинамической функции [123]

$$\begin{aligned}f(\lambda) &= \frac{P + \rho v^2}{p^*} = (1 + \lambda^2) \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}, \\ \lambda &= \frac{\sqrt{k+1} M}{\sqrt{(k-1) M^2 + 2}},\end{aligned}\tag{28.17}$$

определяющей эту величину в газовой динамике.

Замедление времени и сокращение длины. Рассмотрим теперь эффект замедления времени и сокращения длины Лоренца – Фицджеральда в АТО. Из (28.7) и (28.8) можно выразить dx и dt через величины dX и dT в движущейся системе координат. Имеем

$$\begin{aligned}dx &= \gamma(dX + McdT), \quad dt = \gamma(dt + MdX/c), \quad \text{при } |M| < 1, \\ dx &= \gamma(MdX + cdT), \quad dt = \gamma(MdT + dX/c), \quad \text{при } |M| > 1.\end{aligned}\tag{28.18}$$

Соотношения (28.18) дают замедление времени в движущейся системе координат в фиксированной точке $X = \text{const}$ ($dX = 0$) в виде

$$\begin{aligned}dT &= dt \cdot \sqrt{1 - M^2}, \quad \text{при } |M| < 1, \\ dT &= dt \cdot \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M}, \quad \text{при } |M| > 1.\end{aligned}\tag{28.19}$$

Сокращение длины Лоренца – Фицджеральда в движущейся системе координат также следует из (28.19) при $T = \text{const}$ ($dt = 0$) в виде

$$\begin{aligned}dX &= dx \cdot \sqrt{1 - M^2}, \quad \text{при } |M| < 1, \\ dX &= dx \cdot \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M}, \quad \text{при } |M| > 1.\end{aligned}\tag{28.20}$$

Интересным представляется в АТО «парадокс близнецов». Достаточно одного близнеца поместить в современный самолет и при полете со скоростью звука он будет оставаться в АТО молодым.

Подчеркнем также, что эффект сокращения длины Лоренца – Фицджеральда в АТО при $|M| < 1$ представляет собой другую трактовку правила подобия Прандтля – Глаузтера (см. первые строки соотношений (28.14) и (28.20)). В АТО его можно назвать «сокращением Прандтля – Глаузтера». В акустике движущихся сред [67] также рассматривается аналогичный эффект сжатия продольной координаты x . В то же время закон подобия Акернета (например, для всех слабовозмущенных сверхзвуковых течений, подобных течению с $M^* = \sqrt{2}$), записываемый как

$$P = \gamma p^*(M^*), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}},$$

отличается от (28.14) отсутствием множителя M . На рис. 28.1 показан также γ -фактор при $|M| > 1$.

Дальнейшее построение АТО несложно вести при полном соответствии с СТО и ее расширением на область $|M| > 1$ с преобразованиями (28.8).

§29. Распространение СТО на область сверхсветовых скоростей

Традиционная СТО постулирует конечную скорость распространения взаимодействий, причем полагает эту скорость максимально возможной и равной скорости света в пустоте ($c = 2,998 \cdot 10^8$ м/с). В настоящем параграфе рассмотрим наряду с преобразованиями Лоренца (21.7) при $|M| < 1$ также преобразования (21.6) при $|M| > 1$ и тем самым снимем ограничения по диапазону скоростей материальных тел. Опираясь на сказанное, построим аналог СТО при $|M| > 1$.

Элементы «сверхсветового» аналога СТО. Имеем «сверхсветовые» преобразования Лоренца (см. (25.19)) для системы координат X, Y, Z, T , которая движется относительно исходной системы координат x, y, z, t вдоль оси x со скоростью V_0 ,

$$x = \gamma(MX + cT), \quad y = Y, \quad z = Z, \quad ct = \gamma(McT + X), \quad (29.1)$$

где $\gamma = 1/\sqrt{M^2 - 1}$, $M = V_0/c$. Выпишем еще раз формулы преобразования (25.20)

$$u = \frac{MU + c}{M + U/c}, \quad v = \frac{V\sqrt{M^2 - 1}}{M + U/c}, \quad w = \frac{W\sqrt{M^2 - 1}}{M + U/c}. \quad (29.2)$$

Формулы (29.2) представляют собой закон сложения скоростей в сверхсветовом аналоге СТО. При $M \rightarrow \infty$ имеем $u = U$, $v = V$, $w = W$.

При изучении сверхсветовых движений релятивистских материальных частиц будем исходить, как и в традиционной СТО [46], из принципа наименьшего действия. Действие для свободной сверхсветовой частицы имеет вид

$$S = mc \int_a^b ds = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad (29.3)$$

где L – функция Лагранжа. При $|M| > 1$ имеем $ds = c dt \sqrt{M^2 - 1}$. Тогда

$$S = mc \int_{t_1}^{t_2} c \sqrt{M^2 - 1} dt \quad (29.4)$$

и

$$L = mc^2 \sqrt{M^2 - 1}.$$

Импульс частицы определяется как $\bar{p} = dL/d\bar{V}_0$. Из (29.3) и (29.4) имеем

$$\bar{p} = \frac{mc}{\sqrt{M^2 - 1}}. \quad (29.5)$$

Энергия частицы $e = \bar{p}\bar{V}_0 - L$ запишется, как

$$e = \frac{mc^2}{\sqrt{M^2 - 1}}. \quad (29.6)$$

При $V_0 = c$ импульс и энергия сверхсветовой частицы обращаются в бесконечность. Значит, частица с отличной от нуля массой m не может двигаться со скоростью света.

Совокупность координат сверхсветовых событий (23.1), также как и в обычной СТО, можно рассматривать в виде координат четырехмерных векторов (23.4) с квадратом длины 4-радиус-вектора (23.6). Четырехмерная скорость (4-скорость) тогда представляется вектором

$$u' = \frac{dx'}{ds}. \quad (29.7)$$

Для определения его компонент согласно соотношению

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$$

запишем

$$ds = cdt\sqrt{M^2 - 1} = \frac{c}{\gamma} dt$$

и из (29.7) получаем компоненты 4-скорости в виде

$$u^0 = \gamma, u^1 = \gamma u/c, u^2 = \gamma v/c, u^3 = \gamma w/c. \quad (29.8)$$

Определим теперь 4-импульс

$$p' = (p^1, p^2, p^3, e/c)$$

через вариацию действия [46]

$$\delta S = mcu_i \delta x^i$$

и запишем

$$p^i = mcu^i.$$

Подставляя сюда компоненты 4-скорости (29.8) имеем

$$p^0 = \frac{e}{c} = \gamma mc, p^1 = \gamma mu, p^2 = \gamma mv, p^3 = \gamma mw \quad (29.9)$$

в полном соответствии с (29.5) и (29.6).

4-импульс частицы при использовании преобразований (29.1) преобразуется по формулам

$$p_x = \gamma(MP_x + E/c), p_y = P_y, p_z = P_z, e/c = \gamma(ME/c + P_x), \quad (29.10)$$

где p_x, p_y, p_z – компоненты трехмерного вектора импульса \vec{p} .

Продолжая подобные рассуждения, несложно продолжить построение сверхсветового аналога СТО при $M > 1$, следуя обычной СТО, справедливой при $M < 1$.

Вариант СТО с предельным переходом к ньютоновской механике. Приведем в качестве примера выражение для импульса и энергии сверхсветовой частицы, удовлетворяющие условию предельного перехода при $M \rightarrow \infty$ функции Лагранжа в классическое выражение $L = mV_0^2/2$. Из выражения для действия

$$S = -\alpha \int_a^b ds = \int_{t_1}^{t_2} L dt = -\alpha \int_{t_1}^{t_2} c\sqrt{M^2 - 1} dt$$

получаем

$$L = -\alpha c\sqrt{M^2 - 1}.$$

При $M \rightarrow \infty$ из приближенного выражения

$$L = -\alpha c\sqrt{M^2 - 1} \approx -\alpha V_0$$

определяем $\alpha = -\frac{mV_0}{2}$. Следовательно,

$$L = \frac{mc^2 M}{2} \sqrt{M^2 - 1},$$

а выражения для импульса и энергии частицы принимают вид

$$\bar{p} = \frac{m\bar{V}_0 \left(M - \frac{1}{2M} \right)}{\sqrt{M^2 - 1}}, \quad e = \frac{m\bar{V}_0^2 M}{2\sqrt{M^2 - 1}}. \quad (29.11)$$

Подчеркнем, что при $M \rightarrow \infty$ выражения (29.11) дают традиционные выражения классической механики.

§30. Тахионы с вещественной массой

Сверхсветовые частицы с мнимой массой впервые были рассмотрены Я.П. Терлецким [41, 83]. Американский физик Дж. Фейнберг предложил называть эти частицы тахионами [85]. Обширную библио-

графию научных публикаций по тахионам и описание их свойств можно найти в [84, 85]. Основным вопросом при изучении тахионов является интерпретация их мнимой массы.

Тахионы с мнимой массой покоя. В рамках традиционной СТО, допускающей возможность движения материальных частиц только с досветовыми скоростями, тахионам – сверхсветовым частицам приписывают мнимую массу покоя im_0 (см., например, [83-85, 104]). Такие мнимые тахионы изменяют значение своей массы при переходе через скорость света с комплексного значения на действительное значение и становятся в диапазоне сверхсветовых скоростей вещественными. При скорости тахиона $v > c$ его масса становится равной

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}}.$$

При постулировании максимально допустимой скорости распространения взаимодействий, равной скорости распространения слабого электромагнитного сигнала в пустоте, следующий из этого постулата принцип причинности вступает в противоречие с возможностью существования таких тахионов. Экспериментально зарегистрировать подобные частицы пока не удалось и с точки зрения настоящей монографии вряд ли удастся в будущем.

В то же время наличие сверхкритических преобразований Лоренца автоматически снимает вопрос мнимой массы тахионов и переводит их в разряд обычных материальных частиц с вещественной массой как в досветовом, так и в сверхсветовом диапазонах.

Тахионы в расширенной СТО. В связи с возможностью расширения СТО на область сверхсветовых скоростей, тахионы становятся обычными материальными частицами. В рамках расширенной СТО эти частицы имеют всегда реальное значение массы, а именно

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad \text{при } v < c \quad (30.1)$$

и

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}}, \quad \text{при } v > c \quad (30.2)$$

При этом нет нарушений принципа причинности (по аналогии с тем, что при полетах со сверхзвуковой скоростью принцип причинности также не нарушен).

Для импульса и энергии таких частиц в области сверхсветовых скоростей справедливы соотношения (29.5) и (29.6) и другие выводы предыдущего параграфа.

О световом (критическом) барьере

«Характер влияния отдельных физических воздействий на газовое течение противоположен при докритическом и сверхкритическом режимах.»

Условие обращения воздействий [122, 123]

В этом пункте показывается, что наличие светового критического барьера связано с использованием фактора Лоренца

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad (30.3)$$

который является аналогом широко применяемого в газовой динамике множителя

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-M^2}}, \quad (30.4)$$

где величина числа Маха $M = v/c$, c – скорость звука (в (30.3) c – скорость света).

С целью наглядности рассмотрим взаимное распространение сигнала с характерной скоростью c и движение материальной точки с постоянной скоростью $V = x/t$. Пусть движение материальной точки и распространение сигнала начинается из начала координат ($x = 0, t = 0$), причем сигнал распространяется с одинаковой скоростью c в отрицательном и положительном направлениях оси x . Запишем характеристические переменные (1.1)

$$z = x + ct, \quad z^* = x - ct \quad (30.5)$$

и их дифференциалы

$$dz = dx + cdt, \quad dz^* = dx - cdt.$$

Изобразим в плоскости переменных (x, t) отрезки z и z^* для фиксированного момента времени $t = t_0$ (рис. 30.1).

Траектории распространения сигнала представляются двумя штриховыми прямыми линиями с цифрами 1 и 2 (при $c = \mp 1$ это бисектрисы первого и второго квадрантов). Сплошной прямой линией с

цифрой 3 показана траектория материальной точки, движущейся из начала координат со скоростью V для случая докритических (досветовых) скоростей, когда выполнено неравенство $0 < V < c$. На рис. 30.1 величины $z > 0$ и $z^* < 0$ суть отрезки AB и AC. При движении материальной точки со сверхкритической (сверхсветовой) постоянной скоростью $V > c$ ее траектория в плоскости (x, t) на рис. 30.1 представляется прямой 4. Величины $z > 0$ и $z^* > 0$ для момента времени $t = t_0'$ даются отрезками A'B' и A'C'.

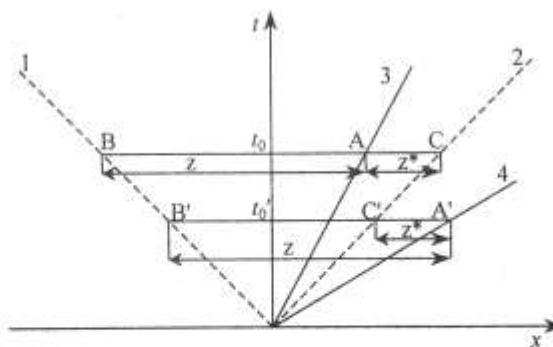


Рис. 30.1. К вопросу о взаимном распространении сигнала и движении материальной точки.

Разделив на t (или на dt) соотношения (30.5)

$$\frac{z}{t} = V + c, \quad \frac{z^*}{t} = V - c$$

или

$$\frac{dz}{dt} = V + c, \quad \frac{dz^*}{dt} = V - c$$

имеем скорости изменения величины гиперболических чисел z и z^* по времени (скорости характеристик). При этом естественно никаких искусственных ограничений на величины скоростей материальных точек вводить не следует. Скорость V имеет возможность изменяться в пределах от $-\infty$ до $+\infty$.

Напомним, что в теории поля (см., например, [46]) вводят различие между случаями $|V| < c$ и $|V| > c$, называя области, где $|V| < c$, вре-

менноподобными, а области, где $|V| > c$, пространственноподобными и анализируют их свойства с позиций гиперболического интервала.

Никаких ограничений на величину скорости V также не следует из дифференциальных уравнений первого порядка акустики и электродинамики. Однако ограничения на величину скорости V можно получить искусственным путем, рассматривая преобразования вращения в плоскости гиперболического аргумента. Гиперболическое расстояние непосредственно вводит в анализ фактор Лоренца. При появлении в преобразованиях фактора Лоренца $\gamma = 1/\sqrt{1 - M^2}$ при $|M| < 1$ или

$\gamma = 1/\sqrt{M^2 - 1}$ при $|M| > 1$ звуковая (световая) точка $|V| = c$ становится особой и возникает звуковой (световой) барьер.

Звуковой барьер легко преодолен в газовой динамике. Напомним, например, течение в сопле Лаваля с сужением и расширением площади F . Соответствующее уравнение, содержащее квадрат фактора Лоренца, в одномерном случае имеет вид (см. [3, 123])

$$\frac{dV}{V} = \gamma^2 \frac{dF}{F}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}, \quad (30.6)$$

где V – скорость потока в сопле. Наличие критического сечения сопла, где $dF = 0$, позволяет гладко перейти от дозвукового к сверхзвуковому потоку. Линеаризация уравнений газовой динамики и переход к потенциалу скорости также вводит в анализ фактор Лоренца, в частности, как было упомянуто ранее, при получении законов подобия Прандтля – Глауэрта и Акертера [6].

В заключении параграфа напомним, каким образом можно исключить из рассмотрения область сверхсветовых скоростей (в некотором смысле следя истории науки начала XX века). Так, хорошо известно, что А. Зоммерфельд [168] в 1904 году опубликовал свой анализ проблемы ускорения материальных точек до скоростей, больших c . Он сделал вывод, что при таких скоростях материальные точки должны были бы вести себя на первый взгляд абсурдным образом: при потере энергии они ускорялись. Это происходит с «материальными точками» газообразной среды и в настоящее время не считается абсурдным. Далее, А. Эйнштейн делает вывод о невозможности движения тел со скоростями, превышающими скорость света, на основании появления радикала $\sqrt{1 - M^2}$ в обычных формулах критических преобразований Лоренца (см., цитирование на стр. 48). Подобные выводы, наряду с аналогичны-

ми заключениями (см., например, статью Г. Минковского [45]) сыграли основную роль в запрете на сверхсветовые скорости. Отказ от постулата максимальной скорости света в пустоте и введение в рассмотрение сверхсветовых преобразований Лоренца существенно расширяет границы СТО. В случае, если дополнительно к линейным моделям сформулировать нелинейные модели газообразной электромагнитной или гравитирующей среды, то по аналогии с классической газовой динамикой возможно осуществить гладкий переход из области досветовых в область сверхсветовых скоростей.

Закончим параграф цитированием важного вывода из условия обращения воздействия (см. [123], стр. 203): «Под влиянием одностороннего воздействия величину скорости газового потока (достаточно плотного потока частиц) можно довести только до критической, но нельзя перевести через нее.» (Не порекомендовать ли в связи с этим выводом рассмотреть возможность обратить воздействие в ускорителях элементарных частиц).

Выводы

1. Число Рейнольдса $Re = UL/v$, число Кнудсена $Kn = l/L$ и выводимая в кинетической теории газов формула для коэффициента кинематической вязкости $\nu = v_{cp}l/2$, где v_{cp} – средняя скорость хаотического движения молекул, l – средняя длина свободного пробега молекул, позволяют определить безразмерное число $I = v_{cp}/U$ при помощи соотношения $I \cdot Kn \cdot Re = 2$. Безразмерное число I характеризует соотношение между динамическими параметрами (скоростями) среды на молекулярном и макроскопическом уровнях описания. При относительно малых значениях макроскопической скорости U , когда $I \gg 1$, доминируют механизмы молекулярного обмена и эффективно идет осреднение («выравнивание») параметров потока. При достаточно больших макроскопических скоростях $U \sim v_{cp}$, $I \sim 1$ становится весьма существенным механизм обмена между макроскопическим и молекулярным переносом.
2. Гидродинамическое приближение микроструктурной дисперсии и модель Бюргерса позволяют аналитическим путем получить выражение для «критического числа Рейнольдса» $Re_c = \sqrt{3/2}$ и
3. критического значения числа $I_c = 1,64$, при которых решение в виде фронта перехода меняет свою структуру с монотонной на осцилляционную форму. Для указанной одномерной модели это аналог перехода «ламинарного» течения в «турбулентное».
4. Модель гидродинамической диспергирующей среды с собственным электрическим взаимодействием (в частности, модель низкотемпературной плазмы) допускает образование широкого спектра классических и частицеподобных солитонов и кноидальных периодических волн. Из подобного типа образований подчеркнем наличие классических (единичных) и частицеподобных солитонов, распространяющихся с сверхкритической скоростью без существенных (в данной модели нулевых) потерь энергии.
5. Показана возможность построения Акустической Теории Относительности (АТО) и продемонстрированы некоторые ее характерные особенности (акустический фактор Лоренца, замедление времени и сокращение длины Лоренца – Фицджеральда, справедливость формулы $E = mc^2$, где c – скорость звука).
6. Продемонстрирована возможность построения Специальной Теории Относительности (СТО) в области сверхсветовых скоростей (по аналогии с традиционной СТО).
7. Показана возможность существования тахионов (сверхсветовых материальных частиц) с вещественной массой. Эта возможность обеспечивается наличием расширенной Лоренц – инвариантности для рассматриваемых моделей физических процессов.

ми заключениями (см., например, статью Г. Минковского [45]) сыграли основную роль в запрете на сверхсветовые скорости. Отказ от постулата максимальной скорости света в пустоте и введение в рассмотрение сверхсветовых преобразований Лоренца существенно расширяет границы СТО. В случае, если дополнительно к линейным моделям сформулировать нелинейные модели газообразной электромагнитной или гравитирующей среды, то по аналогии с классической газовой динамикой возможно осуществить гладкий переход из области досветовых в область сверхсветовых скоростей.

Закончим параграф цитированием важного вывода из условия обращения воздействия (см. [123], стр. 203): «Под влиянием одностороннего воздействия величину скорости газового потока (достаточно плотного потока частиц) можно довести только до критической, но нельзя перевести через нее.» (Не порекомендовать ли в связи с этим выводом рассмотреть возможность обратить воздействие в ускорителях элементарных частиц).

Выводы

1. Число Рейнольдса $Re = UL/v$, число Кнудсена $Kn = l/L$ и выводимая в кинетической теории газов формула для коэффициента кинематической вязкости $\nu = v_{cp}l/2$, где v_{cp} – средняя скорость хаотического движения молекул, l – средняя длина свободного пробега молекул, позволяют определить безразмерное число $I = v_{cp}/U$ при помощи соотношения $I \cdot Kn \cdot Re = 2$. Безразмерное число I характеризует соотношение между динамическими параметрами (скоростями) среды на молекулярном и макроскопическом уровнях описания. При относительно малых значениях макроскопической скорости U , когда $I \gg 1$, доминируют механизмы молекулярного обмена и эффективно идет осреднение («выравнивание») параметров потока. При достаточно больших макроскопических скоростях $U \sim v_{cp}$, $I \sim 1$ становится весьма существенным механизм обмена между макроскопическим и молекулярным переносом.
2. Гидродинамическое приближение микроструктурной дисперсии и модель Бюргерса позволяют аналитическим путем получить выражение для «критического числа Рейнольдса» $Re_c = \sqrt{3/2}$ и
3. критического значения числа $I_c = 1,64$, при которых решение в виде фронта перехода меняет свою структуру с монотонной на осцилляционную форму. Для указанной одномерной модели это аналог перехода «ламинарного» течения в «турбулентное».
4. Модель гидродинамической диспергирующей среды с собственным электрическим взаимодействием (в частности, модель низкотемпературной плазмы) допускает образование широкого спектра классических и частицеподобных солитонов и кноидальных периодических волн. Из подобного типа образований подчеркнем наличие классических (единичных) и частицеподобных солитонов, распространяющихся с сверхкритической скоростью без существенных (в данной модели нулевых) потерь энергии.
5. Показана возможность построения Акустической Теории Относительности (АТО) и продемонстрированы некоторые ее характерные особенности (акустический фактор Лоренца, замедление времени и сокращение длины Лоренца – Фицджеральда, справедливость формулы $E = mc^2$, где c – скорость звука).
6. Продемонстрирована возможность построения Специальной Теории Относительности (СТО) в области сверхсветовых скоростей (по аналогии с традиционной СТО).
7. Показана возможность существования тахионов (сверхсветовых материальных частиц) с вещественной массой. Эта возможность обеспечивается наличием расширенной Лоренц – инвариантности для рассматриваемых моделей физических процессов.

ДОПОЛНЕНИЕ. О ВОЗМОЖНОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ В РАМКАХ КЛАССИЧЕСКОГО (НЬЮТОНОВСКОГО) ПОДХОДА РЯДА ФИЗИЧЕСКИХ И АСТРОФИЗИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

С позиций сложившейся к настоящему моменту затруднительной ситуации с теоретическим описанием ряда физических и астрофизических процессов представляется весьма интересной попытка распространить классическую методологию континуального описания газообразной диспергирующей среды на моделирование ТМ и других природных явлений.

При моделировании НТМ как газообразной диспергирующей среды ее теоретическое описание будет опираться на законы сохранения массы, импульса и энергии. Подобные законы и следующие из них уравнения выписаны в работах [17-21] в приближении квазистационарных и нестационарных электромагнитных и гравитационных взаимодействий. Для случая НТМ с доминирующим электромагнитным взаимодействием их форма весьма близка к записи уравнений для двумерной гидродинамической модели плазмы (§12). Для случая НТМ с доминирующим гравитационным взаимодействием уравнения будут аналогичны соответствующим уравнениям §14. Ниже предложена возможная физическая и астрофизическая трактовка ряда полученных в §17, §19 и §20 точных решений волнового и солитонного типа.

Моделирование гамма-всплесков. Рассмотрим возможную физическую трактовку изолированных солитонных решений, реализующихся в диапазоне значений $\sqrt{c_s^2 + c_\perp^2} < U < U_*$ (рис. 17.1, г). Подобного типа решения в виде ионно-звуковых солитонов достаточно подробно изучены в физике плазмы [8, 25]. На рис. 17.3 приведены профили скорости и концентрации частиц в таких изолированных солитонах при $U = 1,5, 1,55$ и $1,569$. Отметим важную особенность у таких солитонов: солитоны большей амплитуды распространяются с большей скоростью. Эти солитоны имеют ограничение по скорости распространения $U < U_*$ и ограничение по значению амплитуды: по скорости ограничение на амплитуду около $0,5695$, по концентрации около $1,65$. Подобные солитоны представляют собой одномерную модель всплесков гамма-излучения, которые могут распространяться на большие космологические расстояния без изменения своей формы в среде ньютоновской темной материи. Солитоны большей амплитуды имеют большую скорость

и достигают Земли раньше (причем их скорость распространения превышает критическую скорость – скорость света в вакууме, что не противоречит опытным данным работ [108-110]).

Продемонстрируем модельным примером распад начального сжатия, основываясь на дополнительных упрощениях системы уравнений (12.1). Из системы (22.1), следуя работам по физике плазмы [8], можно получить уравнение Кортеугера – де Вриза или инвариантное квазилинейное уравнение третьего порядка [32] из §15.

В конце §20 приведены численные результаты по распаду начального сжатия на последовательность солитонных решений для модельного уравнения (15.3). Отметим образование в результате такого распада нескольких солитонов, скорость которых пропорциональна величине их амплитуды. Данное решение может представлять собой простейшую модель гамма-всплеска и его послесвечения (в рентгеновском и оптическом диапазонах), образующихся одновременно в результате взрыва сверхновой, однако приходящих к наблюдателю в разное время.

Рассмотренные сверхсветовые солитонные решения достаточно большой амплитуды мы рассматриваем как одномерные модели гамма-всплесков. Аналогичные солитонные решения малой амплитуды можно рассматривать как простейшую модель нейтрино. При этом может представлять интерес класс точных и численных решений инвариантного уравнения (15.3), которые демонстрируют их некоторые особенности [23, 30] (в частности, изменение формы солитонов при их взаимодействии). Подчеркнем, что в приближении НТМ всплески гамма-излучения и нейтрино имеют одну и ту же природу (изолированные сверхсветовые солитоны) и их отличие состоит, в основном, в величине амплитуды солитона. В связи с указанной особенностью можно рассмотреть принципиальную возможность регистрации подобных солитонов с помощью методик регистрации гамма-всплесков.

Космические частицы сверхвысоких энергий. Рассмотрим теперь возможную физическую трактовку решений §17 при $U = U_*$, которые на фазовой плоскости представляются сепаратрисой, выходящей из второй особой точки и проходящей через четвертую и первую особые точки (рис. 17.1, д). Данное решение представляет собой изолированный частицеподобный солитон с сосредоточенными в центре массой и зарядом, который распространяется со скоростью U_* , в $1,5695$ раза превышающую значение критической скорости c . На рис. 17.4 показано распределение скорости и концентрации частиц в таком солитоне. Важной особенностью этого решения является изоэнтропическое (бесскач-

ковое) торможение сжимаемой газообразной среды темной материи от сверхсветового значения, равного 1,5695, с плавным переходом через значение критической скорости c_* (особая точка 4) до нулевого значения (особая точка 1). Это обстоятельство связано с возможностью передачи возмущений со скоростью, превышающей c_* , за счет электрического взаимодействия в рассматриваемой двухжидкостной модели газообразной среды. Аналогично в плазме мы имеем также суммарную скорость распространения возмущений (ионно-звуковых волн). Если моделировать распространение КЛСЭ с помощью рассматриваемых решений, то их распространение в среде НТМ (в идеальном приближении) будет происходить без потерь энергии (отсутствуют волновые и вязкие потери), т.е. не должно быть «обрзания» энергетического спектра этих частиц (эффекта Грейзена – Зацепина – Кузьмина [14,15]).

Космические струи. Остановимся теперь на возможном механизме ускорения космических частиц до сверхвысоких значений энергии в космических внегалактических струях. Напомним полученные в §19 точные решения нелинейной системы уравнений, описывающих газообразную НТМ при наличии гравитационного собственного силового поля.

Решению, моделирующему внегалактические сверхсветовые струи, отвечает сепаратриса, выходящая из первой особой точки и проходящая через седловую особую точку 3. До точки 3 скорость струи досветовая, после этой точки скорость струи сверхсветовая. Здесь можно проследить аналогию с переходом через критическую скорость (скорость звука) в сжимаемых потоках газа (в соплах Лаваля) и с распространением в затопленном пространстве сверхзвуковых струй. Подчеркнем еще раз реализуемую возможность плавного ускорения и перехода через значение критической скорости потоком газообразной среды при наличии собственного гравитационного поля.

Космические внегалактические сверхсветовые струи представляют собой идеальный механизм ускорения частиц до сверхвысоких значений энергии. В связи с этим естественно допустить данный механизм ускорения для космических лучей сверхвысоких энергий.

Уединенные и периодические волны. Теория НТМ использует абсолютное трехмерное евклидово пространство и абсолютное время. Из законов сохранения следует квазилинейная система уравнений гидродинамического типа, в которой конвективный перенос среды описывается слагаемыми, содержащими оператор $(\vec{v} \cdot \nabla)$. Наличие в уравнениях этого квазилинейного оператора обеспечивает их инвариантность

относительно преобразования Галилея. Описываемые с помощью этого оператора нелинейные эффекты играют важную роль в формировании фронтов перехода и уединенных волн. Так, взаимное уравновешивание эффектов нелинейности и дисперсии является определяющим фактором образования и устойчивой структуры уединенных волн – солитонов, способных распространяться без изменения своей формы на большие расстояния.

Линеаризация указанной квазилинейной системы гидродинамического типа (по аналогии с акустическим приближением в гидродинамике) приводит к линейной системе уравнений, в том числе для векторов напряженности электрического \bar{E} и магнитного \bar{H} поля. Для свободного пространства (при отсутствии сосредоточенных токов и зарядов) данная система имеет вид (запишем ее для удобства изложения еще раз)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} - c \operatorname{rot} \bar{H} + c \operatorname{grad} \phi &= 0, \\ \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \bar{E} + c \operatorname{grad} \psi &= 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + c \operatorname{div} \bar{E} &= 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} + c \operatorname{div} \bar{H} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{Д.1})$$

В системе (Д.1) скалярные функции ϕ и ψ характеризуют концентрацию силовых линий электрического и магнитного поля соответственно. При постоянных значениях ϕ и ψ система (Д.1) переходит в традиционную систему уравнений электродинамики Максвелла. Из системы (Д.1) следуют, как это было уже отмечено, волновые уравнения Даламбера для любой определяемой величины \bar{E} , \bar{H} , ϕ и ψ .

Линейная система (Д.1), так же как и линейные системы уравнений электродинамики и акустики инвариантны относительно преобразований Лоренца. Благодаря линеаризации мы переходим из абсолютного трехмерного евклидова пространства в псевдоевклидово пространство Минковского.

На рис. Д.1 приведен пример изменения векторов напряженности \bar{E} и \bar{H} в одномерной (плоской) монохроматической волне, распространяющейся вдоль оси x (одномерное решение системы (Д.1)).

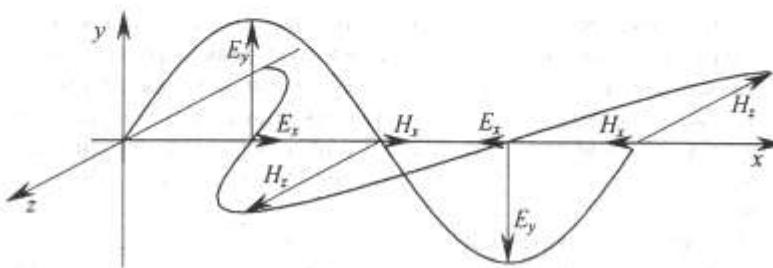


Рис. Д.1. Монокроматическая одномерная электромагнитная волна при наличии продольных и поперечных составляющих электромагнитного поля.

Продемонстрируем теперь влияние эффектов нелинейности на поведение периодической волны. На рис. Д.2 приведены распределения скорости u и концентрации n для трех решений, определяемых замкнутыми траекториями вокруг особой точки 2 типа центра (рис. 17.2,б) при значениях $U=1,05$ (сплошная линия), $1,1$ (пунктирная линия) и $1,3$ (штриховая линия). При малых амплитудах (например, при $U=1,05$) имеем решения, близкие к синусоидальным, с увеличением амплитуды (например, при $U=1,3$) имеем решения, близкие к периодическим кноидальным волнам.

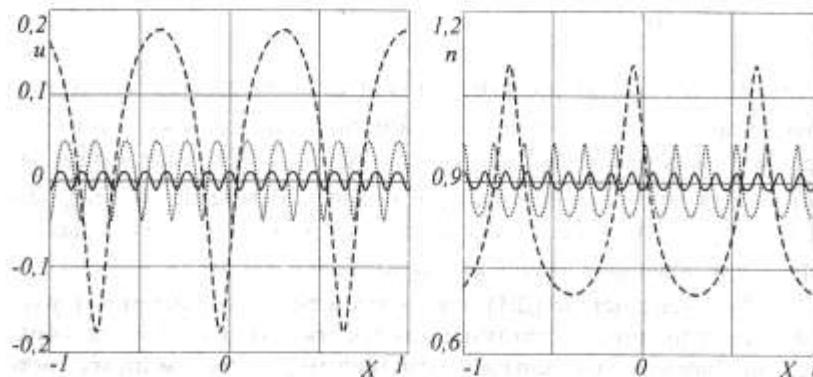


Рис. Д.2. Распределения скорости $u(X)$ и концентрации $n(X)$ в периодической волне, соответствующей замкнутой интегральной кривой уравнения (17.3) для разных значений U : $U=1,05$ – сплошная линия, $U=1,1$ – пунктирная линия, $U=1,3$ – штриховая линия

О корпускулярно-волновом дуализме. Рассмотрим подробнее вопрос корпускулярно-волнового дуализма электромагнитного излучения и вещества в приближении НТМ. Продемонстрируем решения в форме частицеподобных солитонов с сосредоточенными в центре массой и зарядом при $U < c_s$. Указанным солитонам на рис. 17.1,а отвечает сепаратриса, исходящая из седловой особой точки 2 и приходящая в узловую особую точку 1. На рис. 17.2 сплошной линией представлено распределение скорости и концентрации в таком солитоне при значении $U=0,9$. Аналогичные решения имеют место в сферическом случае [19]. Данные решения с большой степенью осторожности можно отождествить с электроном и окружающим его поляризованным пространством («шубой»). При таком представлении электрона в форме частицеподобного солитона приходим к единообразному описанию корпускулярно-волнового дуализма вещества.

Как было показано в предыдущих параграфах, эффекты дисперсии, связанные с электрическим взаимодействием, приводят в газообразной нелинейной среде к решениям в форме изолированных солитонов (а также кноидальных волн), распространяющихся со сверхкритической скоростью. Подобные солитоны также естественно отождествить с «корпускулами» излучения.

Рассмотрение нелинейной модели НТМ, содержащей слагаемые вида $(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}$ и продольную компоненту электрического взаимодействия, отвечающую за эффекты дисперсии газообразной среды, с однозначностью приводит к решениям в виде нелинейных изолированных (или кноидальных) волн – солитонов с сосредоточенными в центре массой и зарядом или обычных солитонов. В этой связи отметим, что эффект Комптона по рассеянию рентгеновских лучей свободными электронами и по рассеянию гамма-лучей свободными протонами также моделируется в рамках рассматриваемого расширения классической электромагнитной теории с введением продольной составляющей электромагнитного излучения. Так, рентгеновские и гамма-лучи, которые в рамках рассматриваемой модели представляются кноидальными нелинейными волнами в дисперсной среде НТМ, приводят к поступательно-колебательным движениям резонансных электронов и протонов, излучающих, в силу эффекта Доплера, волны наименьшей длины в направлении движения и наибольшей длины – в противоположном направлении (имеем соответствующую формулу зависимости от угла излучения θ в виде $\lambda' - \lambda = \lambda_0(1 - \cos\theta)$). Ряд экспериментальных фактов, описывающихся в настоящее время в рамках «корпускулярного» подхода,

такие как фотоэффект и световое давление, также могут быть объяснены при наличии продольной компоненты электрического взаимодействия.

Резюмируя, в целом, следует сказать, что корпускулярно-волновой дуализм излучения и вещества с единых позиций описывается нелинейной теорией НТМ в двухидкостном приближении. Однако подчеркнем еще раз, что приведенный анализ точных решений сделан для уравнений, полученных при ряде конкретных допущений и к их приведенной выше физической трактовке надо подходить весьма осторожно.

Возможные агрегатные состояния ТМ. В изложенной модели НТМ рассматривалась пока только в агрегатном состоянии сжимаемой сплошной среды. Представляется вполне естественным провести дальнейшую аналогию с привычной нам газообразной средой и допустить возможность существования других агрегатных состояний НТМ, в частности, в жидкой и твердой фазах. Касаясь жидкой фазы НТМ, рассмотрим гипотезу, что ядерная жидкость является жидким агрегатным состоянием НТМ. Здесь следует подчеркнуть, что ядра атомов часто моделируются в форме ядерной жидкости [169], которая наподобие обычной жидкости может испаряться и переходить в газообразное состояние. При высказанной гипотезе получаем интересные и достаточно простые модели нуклонов и ядер. Так протон будет моделироваться сосредоточенным в центре положительным зарядом (с характерными параметрами, аналогичными модели электрона, рассмотренной в предыдущем пункте), окруженным сферообразной каплей НТМ в слабо сжимаемой жидкой фазе (размера порядка 10^{-13} см). Нейтрон можно представить подобно протону, захватившему электрон, который находится внутри жидкой капли НТМ. Тогда ядра атомов представляются слившимися каплями нуклонов, образующими единую каплю ядра. Центры электрона, протона и нейтрона, где сосредоточены отрицательный и положительный заряды, будем считать состоящими из НТМ в твердой фазе. Несмотря на очевидную простоту предлагаемых моделей, с их помощью можно объяснить ряд наблюдаемых свойств нуклонов и ядер атомов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С позиций настоящей монографии теория газообразной диспергирующей среды будет играть главенствующую роль в описании многих природных процессов.

Для барионной газообразной среды к этим процессам можно отнести широкий класс турбулентных течений. Практическая необходимость адекватного моделирования турбулентных течений настоятельно требует решения проблемы замкнутого математического описания турбулентности. При наличии такого метода следующим шагом будет создание надежных прикладных программ расчета конкретных задач с помощью современных быстродействующих ЭВМ.

В плане суббарионной материи раскрываются также обширные перспективы решения многих проблем физики и астрофизики на основе классических моделей газообразной диспергирующей среды. Здесь, по нашему мнению, будет неизбежен возврат к абсолютным понятиям времени и пространства. В связи с чем данному вопросу была посвящена первая весьма большая глава монографии.

Важным вопросом, подробно рассмотренным в монографии, явился вопрос расширения Лоренц – инвариантности на область сверхкритических (и прежде всего, сверхсветовых) скоростей. Актуальность этого вопроса проявляется в необходимости рассмотрения проблемы светового барьера и в установлении границ применимости знаменитого соотношения $E = mc^2$. Неприменимость этой формулы при значении скорости материальных частиц $V = c$ может в конце концов (при практическом подтверждении сверхсветовых скоростей материальных частиц или электромагнитных сигналов) привести к существенному пересмотру стандартных моделей современной физики.

Тесно связан с вышерассмотренным вопрос о природе темной материи. С позиций классической ньютонаской механики газообразной диспергирующей среды проблема темной материи имеет вполне разумное решение, представленное в монографии.

Авторы выражают надежду, что освещенные в книге актуальные вопросы механики газообразных диспергирующих сред будут способствовать активизации научных исследований в этом направлении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Часть 1 и 2. М.: Физ. мат. лит., 1963.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
3. Лойцинский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970.
4. Станюкович К.П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Наука, 1971.
5. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Том 1 и 2. М.: Наука, 1970.
6. Черный Г.Г. Газовая динамика. М.: Наука, 1988.
7. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
8. Карпман В.И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973.
9. Нелинейные волны. Под ред. С. Лейбовича и А. Сибасса. М.: Мир, 1977.
10. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
11. Кунин И.А. Теория упругих сред с микроструктурой. М.: Наука, 1975.
12. Максвелл Д.К. Избранные сочинения по теории электромагнитного поля. М.: ГИТТЛ, 1952.
13. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970.
14. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1967.
15. Иванов М.Я. Об аналогии между газодинамическими и электродинамическими моделями. Физическая мысль России, 1998, № 1, с. 1-14.
16. Иванов М.Я. О функциях «характеристического» аргумента в акустике и электродинамике. РАН, Математическое моделирование, 2000, т. 12, № 9, с. 65-86.
17. Ivanov M.Ja. Accurate dark matter theory and exact solutions. Sources and Detection of Dark Matter and Dark Energy in the Universe. Proc. of the IV Int. Sym. CA, USA, Feb. 23-25, 2000. Ed. D.B. Cline.
18. Ivanov M.Ja. Newtonian dark matter identification and search. Proc. of the Third Int. Workshop on the Identification of Dark Matter. Ed. N.J.C. Spooner, V. Kudryavtsev. World Scientific. 2001, p. 324-330.
19. Иванов М.Я., Терентьева Л.В. Механические модели космических струй и гамма всплесков. VIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Пермь, 23-29 августа 2001. Аннотации докладов, с. 288.
20. Ivanov M.Ja. The classic approach to cosmic jets and gamma-ray bursts simulation. V Int. Conf. on Gravitation and Astrophysics of Asian-Pacific Countries (ICGA-2001). Moscow, Oct. 1-7, 2001.
21. Ivanov M.Ja., Terentieva L.V. Soliton-like structures in dark matter. V Int. Symp. on Sources of dark Matter and Dark Energy in the Universe (DM 2002). CA, USA, Feb. 20-22, 2002.
22. Иванов М.Я., Динамика векторных силовых полей в свободном пространстве. Изд. АН РАН, Математическое моделирование, 1998, т. 10, № 7, с. 3-20.
23. Иванов М.Я., Слободкина Ф.А. Анализ стационарных решений инвариантных квазилинейных уравнений третьего порядка. АН СССР. Прикладная математика и механика, 1981, т. 45, вып. 1, с. 128-136.
24. Иванов М.Я. К анализу ионно-звуковых солитонов в замагнченной плазме низкого давления. АН СССР. Физика плазмы, 1981, т. 7, вып. 5, с. 1164-1168.
25. Иванов М.Я. К анализу ионных солитонов в плазме без магнитного поля. АН СССР. Физика плазмы, 1982, т. 8, вып. 2, с. 384-389.
26. Иванов М.Я. Об одном классе солитонных решений гидродинамических уравнений движения ионов в однородной плазме при отсутствии внешних полей. АН СССР, Физика плазмы, 1982, т. 8, вып. 3, с. 607-612.
27. Иванов М.Я. О теоретической возможности удержания плотной адиабатической плазмы самосогласованным электростатическим полем в форме дозвуковых солитонов. АН СССР, Журнал Технической Физики, 1983, т. 53, № 2, с. 387-390.
28. Иванов М.Я., Терентьева Л.В. Стационарные солитоноподобные решения уравнений Эйлера при наличии собственных силовых полей. РАН, Прикладная математика и механика, 1999, т. 63, вып. 2, с. 258-266.
29. Иванов М.Я. О некоторых инвариантных квазилинейных уравнениях третьего порядка. АН СССР, СО, Численные методы механики сплошной среды, 1980, т. 11, № 7, с. 75-90.
30. Иванов М.Я. Об одном классе солитонных решений квазилинейного уравнения третьего порядка. АН СССР, СО, Численные методы механики сплошной среды, 1981, т. 12, № 4, с. 53-63.

31. Иванов М.Я. К моделированию осредненных решений гидродинамических задач. РАН, Математическое моделирование, 1997, т. 9, № 12, с. 110-120.
32. Ivanov M.Ja. Microscale closing method in turbulent flow simulation. The 9th European Turbulence Conference, Southampton, UK, July 2-5, 2002.
33. Большман Л. Избранные труды. М.: Наука, 1984.
34. Беттини А. Физика за пределами Стандартной модели. Эксперименты в лаборатории Гран Сассо. Успехи физических наук, 2001, т. 171, №9, с. 977-1003.
35. Bhattacharjee P. Ultra high energy cosmic ray above 10^{11} GeV: Hints to new physics beyond Standard Model. *Pramana – J. of Physics*, 2000, Vol. 55, No. 1&2, 297-305.
36. Рубаков В.А. Большие и бесконечные дополнительные измерения. Успехи физических наук, 2001, т. 171, №9, с. 913-938.
37. Ньютона И. Математические начала естественной философии. Перевод акад. А.Н. Крылова. Изв. Николаевской морской академии, 1916; Собрание трудов акад. А.Н. Крылова, т. VII, Ленинград, 1936.
38. Лукреций Кар. О природе вещей. Перевод И. Рачинского. М.: ОГИЗ, 1933.
39. Лукреций Кар. О природе вещей. Перевод Ф.А. Петровского. В кн.: Мыслители Рима. М.: Эксмо-Пресс, 1998.
40. Eddington A. The Nature of the Physical World. Ann Arbor: Univ. of Michigan Press, 1958.
41. Терлецкий Я.П. Принцип причинности и второе начало термодинамики. ДАН СССР, 1960, т. 133, № 2, с. 329-332.
42. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.
43. Bernardis P. et al. A flat Universe from high-resolution maps of the cosmic microwave background radiation. *Nature*, 404, 27 April, 2000.
44. Netterfield C.B. et al. A measurement by BOOMERANG of multiple peaks in the angular power spectrum of the cosmic microwave background. April, 2001. (*astro-ph/0104460*).
45. Минковский Г. Пространство и время. АН СССР, Успехи физических наук, 1959, т. 69, вып. 2, с. 303-320.
46. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1973.
47. Угаров В.А. Специальная теория относительности. М.: Наука, 1980.
48. Логунов А.А. Лекции по теории относительности и гравитации. Современный анализ проблем. М.: Наука, 1987.
49. Бёрке У. Пространство – время, геометрия, космология. М.: Мир, 1985.
50. Фридман А.А. О кривизне пространства. В сб. «Избранные труды». М.: Наука, 1966, с. 229-238.
51. Толмен Р. Относительность, термодинамика и космология. М.: Наука, 1974.
52. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. М.: Наука, 1974.
53. Тейлор Э., Уилер Дж. Физика пространства – времени. М.: Мир, 1971.
54. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. Т. 1-3. М.: Мир, 1977.
55. Пенроуз Р. Структура пространства – времени. М.: Бибфизмат, 1995.
56. Пиблс Ф. Дж. Э. Структура Вселенной в больших масштабах. М.: Мир, 1983.
57. Крупномасштабная структура Вселенной. М.: Мир, 1981.
58. Галилей Г. О двух системах мира, птолемеевой и коперниковой. М.-Л., 1948.
59. Sources and detection of dark matter and dark energy in the Universe. Ed. D.B. Cline. IV Int. Symp., held at Marina del Rey, CA, USA, Feb. 23-25, 2000. Springer, 2001.
60. The identification of dark matter. Ed. N.J.C. Spooner, V. Kudryavtsev. Proc. of the III Int. Workshop, York, UK, 18-22 Sept. 2000. World Scientific, 2001.
61. Sources and detection of dark matter and dark energy in the Universe. V Int. Symp., held of Marina del Rey, CA, USA, Feb. 20-22, 2002.
62. Quintessence. Physics World, Nov. 2000, <http://phiscsweb.org/article/world/13/11/8/1>.
63. Вайнберг С. Первые три минуты. Современный взгляд на происхождение Вселенной. М.: Энергоиздат, 1981.
64. Силк Дж. Большой Взрыв. Рождение и эволюция Вселенной. М.: Мир, 1982.
65. Долгов А.Д., Зельдович Я.Б., Сажин М.В. Космология ранней Вселенной. М.: МГУ, 1988.
66. Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М.: Изд. ин. лит., 1961.
67. Peccei R.D., Quinn H.R. *Phys. Rev. D.*, 1977, Vol. 16, p. 1971.
68. Choi K., Kang K., Kim J.E. *Phys. Lett.*, 1989, Vol. 62, p. 849.

69. Скobelев В.В. Двухфотонный распад аксиона во внешнем электромагнитном поле. ЖТФ, 1999, т. 115, вып. 2, стр. 385-391.
70. VLT observation confirm that the Universe was hotter in the past. ESO Press Release 27/00, 20 Dec. 2000.
71. A repulsive force in the Universe. Phys. News Update, No. 361, 1998.
72. Hogan C.J., Kirshner R.P., Suntzeff N.B. Surveying space-time with supernovae. Scientific American, 1999, 280, 1, 46-51.
73. Krauss L.M. Cosmological antigravity. Scientific American, 1999, 280, 1, 53-59.
74. Принцип относительности. Сборник работ по специальной теории относительности. М., Атомиздат, 1973.
75. Smoot G.F., Gorenstein M.V., Muller R.A. Detection of anisotropy of the cosmic blackbody radiation. Phys. Rev. Lett., 1977, Vol. 39, No. 14, pp.898-901.
76. Вавилов С.И. Исаак Ньютона. М.: Изд. АН СССР, 1943.
77. Басов Н.Г. и др. Нелинейное усиление импульса света. Журнал экспер. и теор. физики, 1966, т. 50, № 1.
78. Крюков П.Г., Летохов В.С. Распространение импульса света в резонансно усиливающей (поглощающей) среде. УФН, 1969, т. 99, № 2.
79. Chiao R.Y. Superluminal (but causal) propagation of wave packets in transparent media with inverted atomic populations. Phys. Rev., A 48, R34-R37 (1993).
80. Wang L.J., Kuzmich A., Dodari A. Gain-assisted superluminal light propagation. Nature, 2000, 406.
81. Mungai D., Ranfagni A., Ruggeri R. Phys. Rev. Lett., 2000, Vol. 84, 4830.
82. Alexeev I., Kim K.Y., Milchberg H.M. Phys. Rev. Lett., 2002, Vol. 88, 073901.
83. Терлецкий Я.П. Парадоксы теории относительности. М.: Наука, 1966.
84. Барашенков В.С. Тахионы. Частицы, движущиеся со скоростями больше скорости света. УФН, 1974, т. 114, в. 1.
85. Эйнштейновский сборник 1973. М., Наука, 1974.
86. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
87. Эйнштейн А. Сущность теории относительности. Собрание научных трудов. Т. 2. М.: Наука, 1966.
88. Voigt W. Über Das Dopplersche Prinzip. Gott. Nachr. 1887. S. 41.
89. Лармор Дж. Эфир и материя. В сб. «Принцип относительности» под ред. А.А. Тяпкина. М.: Атомиздат, 1973. С. 48-64.
90. Лоренц Г.А. Электромагнитные явления в системе, движущейся с любой скоростью, меньшей скорости света. Там же. С. 67-90.
91. Пуанкаре А. О динамике электрона. Там же. С. 118-161.
92. Коchin Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М., АН СССР, 1951.
93. Euler L. Opera omnia, ser. II, v. 12.
94. Фарадей М. О физическом характере линий магнитной силы. Экспериментальные исследования по электричеству. М., АН СССР, 1952.
95. Markowitz A.G. Cosmological Dark Matter: An Overview. <http://www.astro.ucla.edu/~agm/darkmtr.html>.
96. Griest K. The Nature of the Dark Matter. <http://web.mit.edu/~redingtn/www/netadw/specr/012/012.html>.
97. Oldershaw R.L. The galactic Dark Matter: Predictions and observations. A thirst College. <http://www.amherst.edu/~rlolders/TWIN.HTM>.
98. The cosmic Microwave Background. http://www.astro.ubc.ca/people/scott/cmb_intro.html.
99. The Cosmic Microwave Background Radiation. <http://cfa.berkeley.edu/darkmat/cmd.html>.
100. Реликтовое излучение. <http://www.webcenter.ru/~igorelik/cmbru.html>.
101. Gamov G. Phys. Rev. 1946, 70, 572.
102. Gamov G.A. Det Kongelige Danske Vibenskabernes Selskab. Mat.-Fis. Medd., 1953, 27,10.
103. Чернин А.Д. Как Гамов вычислил температуру реликтового излучения, или немного об искусстве теоретической физики. УФН, 1994, т. 164, № 8.
104. Ораевский А.Н. Сверхсветовые волны в усиливающих средах. УФН, 1998, т. 168, № 12.
105. Fishman G.J. Gamma-ray bursts: an overview. Publ. Astron. Soc. Pac., May 22, 1995.
106. Fishman G.J., Hartmann D.H. Gamma-ray bursts. Scientific American, N. 7, 1997.
107. Gamma-ray bursts found to be most energetic event in universe. PRC 98-17. [Http://opositr.stsci.edu/publinfo/pr/1998/17/](http://opositr.stsci.edu/publinfo/pr/1998/17/).
108. Amali L. et al. Discovery of a transient absorption edge in the X-ray spectrum of GRB 990705. Science, Nov. 3, 2000, 953-955.

109. Piro L/ et al. Observation of X-ray lines from a gamma-ray bursts (GRB 991216): Evidence of moving ejecta form the progenitor. *Science*, Nov. 3, 2000, 955-958.
110. Piro L. The afterglow of gamma-ray bursts: Light of the mystery. <http://www.ias.rm.cnr.it/ias-home/sax/cretaweb.html>.
111. Efimov N.N., Egorov T.A., Glushkov A.V. et al., Proc. Int. Workshop on Astrophysical Aspects of the Most Energetic Cosmic Rays, Kofu 20, 1990.
112. Hayashida N., Honda K., Honda M. et al., *Phys. Rev. Lett.* 1994, 73, 3491.
113. Takeda M. et al. *Phys. Rev. Lett.*, 1998, 81, 1163.
114. Глушкин А.В. Космические лучи с энергиями $E_0 \geq 10^{19}$ эВ и крупномасштабная структура Вселенной. Письма в ЖЭТФ, 2001, т. 73, вып. 7, с. 355-358.
115. Greisen K., *Phys. Rev. Lett.* 1966, 2, 748.
116. Запепин Г.Т., Кузьмин В.А. Письма в ЖЭТФ, 1966, 4, 78.
117. Quasars and active galaxies. Univ. of California, San Diego. <http://cassfoss02.uscd.edu/public/tutorial/Quasars.html>.
118. Wiita P.J. Cosmic Radio Jets. *Astro-ph/0103020*.
119. Superluminal motion in compact radio sources. <http://www.ira.bo.cnr.it/~tvventuri/vbli2.html>.
120. VLA reveals vital details of superfast cosmic jets. [Http://info.aoc.nrao.edu/pr/vla20/jets.html](http://info.aoc.nrao.edu/pr/vla20/jets.html).
121. Открытие гигантского джета у квазара. 10.01.2002. <http://www.nature.ru/db/msg.html?mid=1177503&s>.
122. Вулис Л.А. Термодинамика газовых потоков. М.: Энергоиздат, 1950.
123. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. М.: 1991.
124. Миллионников М.Д. Некоторые проблемы турбулентности и турбулентного тепломассообмена. В сб. «Турбулентные течения». М.: Наука, 1974.
125. Гельфанд И.М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений. УМН, 1959, т. 14, вып. 2, 86.
126. Годунов С.К. О понятии обобщенного решения. ДАН СССР, 1960, т. 134, № 6.
127. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1968.
128. Бюргерс И.М. Об одной математической модели, иллюстрирующей теорию турбулентности. В сб. «Проблемы механики». М.: Изд. иностр. лит., 1955.
129. Франк-Каменецкий Д.А. Лекции по физике плазмы. М.: Атомиздат, 1968.
130. Кролл Н., Трайвеллпис А. Основы физики плазмы. М.: Мир, 1975.
131. Ватажин А.Б., Любимов Г.А., Регирер С.А. Магнитогидродинамические течения в каналах. М.: Наука, 1970.
132. Захаров В.Е., Кузнецов Е.А. ЖЭТФ, 1974, 66, 594.
133. Shukla P.K., Yu M.Y. *J. Math. Phys.*, 1978, 19, 2506.
134. Ray D. *Phys. Fluids*, 1979, 22, 2037.
135. Yu M.Y., Shukla P.K., Bujarbarua S. *Phys. Fluids*, 1980, 23, 2146.
136. Эйнштейн А. О специальной и общей теории относительности. Собрание научных трудов. Т. I. М.: Наука, 1965.
137. Солитоны в действии. Под ред. К. Лонгрена и Э. Скотта. М.: Мир, 1981.
138. Солитоны. Под ред. Р. Буллафа и Ф. Кодри. М.: Мир, 1983.
139. Drazin P.G., Johnson R.S. Solitons: an Introduction. Cambridge Univ. Press, 1996.
140. Korteweg D.J., Vries de G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. – *Phil. Mag.*, 1895, v. 39, p. 422-443.
141. Jeffrey A., Kakutani T. Weak nonlinear dispersive waves: a discussion centered around the Korteweg – de Vries equation. *SIAM Review*, 1972, v. 14, N 4, p. 582-643.
142. Benjamin T.B., Bona J.L., Mahony J.J. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems. – *Phil. Trans. Roy. Soc., London, Ser. A*. 1972, v. 272, p. 47-78.
143. Peregrine D.H. Calculations of the development of an undular bore. – *J. Fluid Mech.*, 1966, v. 25, part. 2, p. 321-330.
144. Kruskal M.D., Miura R.N., Gardner C.S., Zabusky N.J. Korteweg – de Vries equation and generalization. – *J. Math. Phys.*, 1970, v. 11, N 3, p. 952-960.
145. Иванов Б.А., Косевич А.М., Бабич И.М. О локализованных нелинейных колебаниях в ферромагнетиках. – Письма в ЖЭТФ, 1979, т. 29, вып. 12, с. 777-780.
146. Rarkel L. *Phys. Rev.*, 188, 2287 (1969).
147. Mignani R., Recami E. Generalized Lorentz transformations in four dimensions and superluminal objects. *Nuovo Cimento*, 14A, 1, 169-189 (1973).
148. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
149. Годунов С.К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.

150. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1979.
151. Захаров В.Д., Иванов М.Я., Корецкий В.В. Применение неявных разностных схем повышенной точности. В сб. «Проблемы вязких течений». М.: 1981.
152. Кадомцев Б.Б. Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1976.
153. Березин Ю.А. Численное исследование нелинейных волн в разреженной плазме. Новосибирск: Наука, 1977.
154. Tran M.Q. Ion acoustic solitons in a plasma. A review of their experimental properties and related theories. – Physica scripta, 1979, 20, 317.
155. Miles J.W. Solitary waves. – Ann. Rev. Fluid Mech., 12. Palo Alto, Calif., 1980, p.11.
156. Сагдеев Р.З. Коллективные процессы и ударные волны в разреженной плазме. – В кн.: Вопросы теории плазмы, вып. 4 /Под ред. Леонтovichа М.А. М.: Атомиздат, 1964, с. 20.
157. Sakanaka P.H. Formation and interaction of ion-acoustic solitary waves in a collisionless warm plasma. – Phys. Fluids, 1972, 15, 304.
158. Washimi H., Tanuiti T. Propagation of ion-acoustic solitary waves of small amplitude. – Phys. Re. Lett., 1966, 17, 966.
159. Ikezi H. Experiments on ion-acoustic solitary waves. – Phys. Fluids, 1973, 16, 1668.
160. Карпман В.И. Эффекты взаимодействия ионно-звуковых солитонов с резонансными частицами плазмы. – ЖЭТФ, 1979, 77, 1382.
161. Karpman V.I., Lunov J.P., Mishelsen P., Pesseli H.L., Rasmussen J.J., Turikov V.A. Modification of plasma solitons by resonant particles. – Phys. Fluids, 1980, 23, 1782.
162. Schamel H. Role of trapped particles and waves in plasma solitons – theory and application. – Physica scripta, 1979, 20, 306.
163. Сингер С. Природа шаровой молнии. М.: Мир, 1973.
164. Hill E.L. J. Geophys. Research, 1960, 65, 1947.
165. Silberg P.A. J. Geophys. Research, 1962, 67, 4941.
166. Дмитриев М.Т. ЖТФ, 1969, 39, 387.
167. Блохинцев Д.И. Акустика неоднородной движущейся среды. М.: Наука, 1981.
168. Sommerfeld A.K. Akad. Wet. Amsterdam Proc., 1904, 8, 346.
169. Elliot J.B., Moretto L.G., Phair L. et al. Phys. Rev. Lett., 2002, 88.

Михаил Яковлевич Иванов,
доктор физико-математических наук,
Лариса Васильевна Терентьева,
кандидат физико-математических наук

Элементы газодинамики диспергирующей среды

Лицензия ИД № 00039
от 30.08.1999 г.

Подписано в печать 21.11.2002. Формат 60x90/16. Гарнитура «Таймс».
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл.п.л. 10,5.Уч.изд.л. 11.
Тираж 2000 экз. 2-й завод. Заказ 271.

ОАО «Типография № 9»
109033, Москва, Волочаевская ул., 40